BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CODE EPREUVE :
283
CCIP_M2_S

Concepteur : H.E.C. – E.S.C.P. – E.A.P.

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES II

Mercredi 7 mai 2008, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : **l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.**
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Sous réserve d'existence, on note $E(X)$ et $V(X)$ respectivement, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire réelle X quelconque. Pour toute variable aléatoire réelle X admettant une densité sur $\mathbb{R}$, notée f_X, on note $\mathcal{D}_X$ l'ensemble des réels s pour lesquels la variable aléatoire e^{sX} admet une espérance, et on note Φ_X la fonction définie sur $\mathcal{D}_X$ par : $\Phi_X(s) = E(e^{sX})$.

On **admet** les résultats suivants :

- si deux variables aléatoires X et Y sont telles que Φ_X et Φ_Y coïncident sur un intervalle ouvert non vide, alors X et Y ont la même loi ;
- si n est un entier naturel non nul, et $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles quelconques, mutuellement indépendantes, alors, pour tout entier p de $[\![1, n-1]\!]$ et pour toutes fonctions réelles continues φ_1 et φ_2, les variables aléatoires $\varphi_1(X_1, \ldots, X_p)$ et $\varphi_2(X_{p+1}, \ldots, X_n)$ sont indépendantes ;
- si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes admettant une espérance, alors XY admet une espérance, et $E(XY) = E(X)E(Y)$.

La fonction exponentielle est également notée exp. On rappelle que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) dx = \sqrt{2\pi}$.

Dans tout le problème, U désigne une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

Préliminaire

On rappelle que, pour tout s de $\mathcal{D}_X$, on a : $\Phi_X(s) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(sx) f_X(x) dx$.

1. Soit a un réel non nul et b un réel quelconque.

a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2) dx$ est convergente si et seulement si $a > 0$, et vaut alors $\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.

b) En déduire que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2+bx)dx$ est convergente si et seulement si $a > 0$, puis montrer que dans ces conditions, on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2+bx)dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right)$.

2. a) Déterminer $\mathcal{D}_U$; pour tout s de $\mathcal{D}_U$, calculer $\Phi_U(s)$.

b) On pose : $Z = U^2$. Établir que : $\mathcal{D}_Z =]-\infty, \frac{1}{2}[$; montrer, à l'aide du théorème de transfert, que pour tout réel s de $\mathcal{D}_Z$, on a : $\Phi_Z(s) = (1-2s)^{-1/2}$.

3. Soit X une variable aléatoire réelle à densité, et soit μ et β deux réels quelconques.

a) Montrer qu'un réel s appartient à $\mathcal{D}_{\mu X+\beta}$ si et seulement si μs appartient à $\mathcal{D}_X$, et que dans ce cas, on a : $\Phi_{\mu X+\beta}(s) = \exp(\beta s)\Phi_X(\mu s)$.

b) On suppose que X suit une loi γ de paramètre ν, où ν est un réel strictement positif.

Montrer que : $\mathcal{D}_X =]-\infty, 1[$; pour tout s de $\mathcal{D}_X$, établir la formule : $\Phi_X(s) = (1-s)^{-\nu}$. De même, déterminer $\mathcal{D}_{2X}$; pour tout s de $\mathcal{D}_{2X}$, calculer $\Phi_{2X}(s)$.

Partie I. Loi du χ^2 centré

Soit r un entier supérieur ou égal à 1. On considère une variable aléatoire X_r suivant la loi Γ de paramètres $\left(2, \frac{r}{2}\right)$, c'est-à-dire que X_r possède une densité f_{X_r} donnée par :

$$f_{X_r}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{r}{2}} \times \Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} \times x^{\frac{r}{2}-1} \times \exp\left(-\dfrac{x}{2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

On dit que X_r suit une loi du χ^2 («chi deux») centré à r degrés de liberté, et on note : $X_r \hookrightarrow \chi^2(r)$.

1. Étudier les variations de f_{X_4} et tracer sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

2. a) Montrer que la variable aléatoire $\frac{X_r}{2}$ suit une loi γ de paramètre $\frac{r}{2}$. En déduire $E(X_r)$ et $V(X_r)$.

b) Déterminer $\mathcal{D}_{X_r}$; pour tout s de $\mathcal{D}_{X_r}$, calculer $\Phi_{X_r}(s)$.

3. Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On considère n variables aléatoires indépendantes $U_1, U_2, \ldots, U_n$ de même loi que U. Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on pose : $Z_i = U_i^2$.

a) Vérifier que X_1 et U^2 sont de même loi.

b) On pose : $W_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$. Quelle est la loi de probabilité de W_n ?

c) Déterminer $\mathcal{D}_{W_n}$, et pour tout s de $\mathcal{D}_{W_n}$, exprimer $\Phi_{W_n}(s)$ en fonction de s et de n. Établir une relation entre $\Phi_{W_n}(s)$ et $\Phi_{Z_1}(s), \Phi_{Z_2}(s), \ldots, \Phi_{Z_n}(s)$.

4. Soit T une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée, de variance σ^2 inconnue, σ étant un réel strictement positif. Pour n entier supérieur ou égal à 2, on dispose d'un n-échantillon indépendant, identiquement distribué (i.i.d.), $T_1, T_2, \ldots, T_n$ de la loi de T. On considère la variable aléatoire S_n définie par : $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i^2$.

a) Montrer que S_n est un estimateur sans biais et convergent du paramètre σ^2.

b) Soit α un réel vérifiant : $0 < \alpha < 1$, et soit k_α le réel strictement positif tel que : $P([W_n \geqslant k_\alpha]) = 1-\alpha$. Montrer que l'intervalle $\left]0, \frac{nS_n}{k_\alpha}\right]$ est un intervalle de confiance de σ^2 au risque α.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.

Partie II. Loi du χ^2 décentré

On considère une suite $(M_j)_{j\geqslant 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes, telles que pour tout j de $\mathbb{N}^*$, M_j suive la loi normale d'espérance m_j ($m_j \in \mathbb{R}$) et de variance égale à 1.

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on pose : $Y_n = \sum_{j=1}^{n} M_j^2$ et $\lambda_n = \sum_{j=1}^{n} m_j^2$.

On dit que Y_n suit une loi du χ^2 décentré à n degrés de liberté, de paramètre de décentrage λ_n, et on note : $Y_n \hookrightarrow \chi^2(n, \lambda_n)$.

1. Dans cette question *uniquement*, on suppose que l'entier n est égal à 1.

a) Montrer les deux égalités suivantes : $E(U^3) = 0$ et $E(U^4) = 3$.

b) En déduire, en fonction de λ_1, les valeurs respectives de $E(Y_1)$ et de $V(Y_1)$.

c) Montrer que : $\mathcal{D}_{Y_1} =]-\infty, \frac{1}{2}[$ et établir, pour tout réel s de $\mathcal{D}_{Y_1}$, la formule suivante :

$$\Phi_{Y_1}(s) = (1-2s)^{-1/2} \times \exp\left(\frac{s\lambda_1}{1-2s}\right)$$

2. Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$.

a) Calculer $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$ en fonction de n et λ_n.

b) On admet que l'on a : $\mathcal{D}_{Y_n} =]-\infty, \frac{1}{2}[$. Pour tout s de $\mathcal{D}_{Y_n}$, exprimer $\Phi_{Y_n}(s)$ en fonction de s, n et λ_n.

Partie III. Nombre aléatoire de degrés de liberté

Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}$ admettant une espérance $E(X)$, et une variable aléatoire K à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note N_K l'ensemble des entiers naturels k vérifiant $P([K=k]) > 0$, et on suppose que pour tout entier k de N_K, la variable aléatoire X admet une espérance pour la probabilité conditionnelle $P_{[K=k]}$, notée $E(X/K=k)$.

On admet alors l'égalité suivante : $(\star)$ $E(X) = \sum_{k\in N_K} E(X/K=k)P([K=k])$

Soit g l'application définie sur $\mathbb{N}$ par : $g(k) = \begin{cases} E(X/K=k) & \text{si } k \in N_K \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. *Vérification de la formule $(\star)$ sur un exemple.*

Soit $(J_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on pose : $X_k = \sup_{1\leqslant i\leqslant k} (J_i)$; autrement dit, pour tout ω de Ω, $X_k(\omega) = \max_{1\leqslant i\leqslant k} J_i(\omega)$. Soit K une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi uniforme discrète sur $[\![1, n]\!]$ ($n \in \mathbb{N}^*$). On suppose que K est indépendante des variables aléatoires de la suite $(J_i)_{i\geqslant 1}$.
Pour tout ω de Ω, on pose : $X(\omega) = \max_{1\leqslant i\leqslant K(\omega)} J_i(\omega)$, et on admet que X est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Établir, pour tout entier k de $[\![1, n]\!]$ et pour tout réel x, la relation : $P_{[K=k]}([X \leqslant x]) = P([X_k \leqslant x])$.

b) Déterminer la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X.

c) En déduire que X est une variable aléatoire à densité, qui admet une espérance $E(X)$ que l'on exprimera en fonction de $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}$.

d) Vérifier l'égalité $(\star)$: $E(X) = E(g(K))$.

2. Soit $(U_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi normale centrée réduite. Soit K une variable aléatoire indépendante des variables aléatoires de la suite $(U_i)_{i\geqslant 1}$, qui suit la loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{2}$ strictement positif.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on pose : $H_n = U_1^2 + U_2^2 + \cdots + U_{n+2K}^2$. On admet que H_n est une variable aléatoire à densité à valeurs positives, et que $\mathcal{D}_{H_n} =]-\infty, \frac{1}{2}[$.

Soit s un réel de $]-\infty, \frac{1}{2}[$.

a) Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de H_n sachant $[K = k]$ est la loi de la variable aléatoire W_{n+2k} définie dans la question I.3.b.

b) En posant : $X = e^{sH_n}$, déterminer, pour tout entier k de $\mathbb{N}$, l'expression de $g(k)$ en fonction de k.

c) Établir la formule suivante :

$$E(g(K)) = (1-2s)^{-n/2} \times \exp\left(\frac{\lambda s}{1-2s}\right)$$

d) En utilisant l'égalité $(\star)$, admise au début de cette partie, avec $X = e^{sH_n}$, déterminer la loi de H_n.

e) À l'aide de la question III.2.a, montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a :

$$E\left(\frac{1}{H_n}\right) = E\left(\frac{1}{n-2+2K}\right)$$

Partie IV. Estimateur de James-Stein

Soit p un entier supérieur ou égal à 3. On suppose qu'un modèle aléatoire défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ comporte p paramètres réels inconnus $\theta_1, \ldots, \theta_p$ non tous nuls. Un échantillon d'observations statistiques permet d'exhiber des estimateurs $\widehat{\theta_1}, \ldots, \widehat{\theta_p}$ *sans biais* des paramètres $\theta_1, \ldots, \theta_p$ respectivement. On suppose que les variables aléatoires $\widehat{\theta_1}, \ldots, \widehat{\theta_p}$ sont indépendantes et suivent une loi normale de variance égale à 1.

On pose : $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_p)$, $\widehat{\theta} = (\widehat{\theta_1}, \ldots, \widehat{\theta_p})$, $B_p = \sum_{j=1}^{p} \widehat{\theta_j}^2$ et $b_p = \sum_{j=1}^{p} {\theta_j}^2$.

On dit que *le vecteur aléatoire $\widehat{\theta}$ est un estimateur sans biais du paramètre vectoriel θ*, et $E(\widehat{\theta})$ est alors le vecteur θ.

On définit le *risque quadratique scalaire* d'un estimateur θ^* de θ, noté $R(\theta^*, \theta)$, par :

$$R(\theta^*, \theta) = E\Big(\sum_{j=1}^{p} (\theta_j^* - \theta_j)^2\Big)$$

Dans cette partie, on cherche un estimateur θ^* de θ, représenté par un vecteur aléatoire $(\theta_1^*, \ldots, \theta_p^*)$, dont le risque $R(\theta^*, \theta)$ est strictement inférieur à $R(\widehat{\theta}, \theta)$.

1. Justifier que la variable aléatoire B_p suit la loi $\chi^2(p, b_p)$, et qu'elle constitue un estimateur biaisé de b_p.

2. On pose : $\theta^* = \left(1 - \frac{c}{B_p}\right) \times \widehat{\theta}$, où c est un paramètre réel strictement positif. Soit K une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\frac{b_p}{2}$.

a) En admettant que l'on a : $E\Big(\frac{1}{B_p} \sum_{j=1}^{p} \theta_j \, \widehat{\theta_j}\Big) = E\left(\frac{2K}{p-2+2K}\right)$, établir l'égalité suivante :

$$R(\theta^*, \theta) - R(\widehat{\theta}, \theta) = (c^2 - 2c(p-2)) \times E\left(\frac{1}{p-2+2K}\right)$$

b) Montrer que l'inégalité : $R(\theta^*, \theta) < R(\widehat{\theta}, \theta)$, est vérifiée si et seulement si : $0 < c < 2(p-2)$.
Déterminer en fonction de p, la valeur de c pour laquelle $R(\theta^*, \theta) - R(\widehat{\theta}, \theta)$ est minimale.
Comment s'écrit alors l'estimateur θ^* ?

Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2008

HEC MATH II 2008 VOIE S

CORRIGE

PRELIMINAIRES

Rappel : une densité de la loi $\Gamma(\frac{1}{b},\nu)$ est $f(x)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad x<0\\ \dfrac{b^\nu x^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}\exp(-bx) & \text{si} \quad x\geq 0\end{cases}$

1−a)

Notons φ_a la fonction $x\mapsto \exp(-ax^2)$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ car $x\mapsto -ax^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ et l'exponentielle aussi. L'intégrale $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_a(x)dx$ est impropre uniquement en $-\infty$ et $+\infty$. De plus la fonction φ_a est paire, donc I converge si et seulement si $\int_0^{+\infty}\varphi_a(x)dx$ converge.

- **Convergence :**

∗ **Cas où** $a>0$. Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\exp(-ax^2)=0$, donc $\varphi_a(x)\underset{(+\infty)}{=}\circ\left(\frac{1}{x^2}\right)$; l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}dx$ converge (critère de Riemann, $2>1$), donc par négligeabilité des fonctions continues positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty}\varphi_a(x)dx$ converge, donc $\int_0^{+\infty}\varphi_a(x)dx$ converge.

∗ **Cas où** $a\leq 0$. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\varphi_a(x)=+\infty$. Il existe $A>0$ tel que $\forall x\geq A,\ \varphi_a(x)\geq\frac{1}{x}>0$. Par minoration des fonctions continues positives, $\int_A^{+\infty}\varphi_a(x)dx$ diverge car $\int_A^{+\infty}\frac{dx}{x}$ diverge.

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-ax^2)dx$ converge si et seulement si $a>0$

- **Calcul de l'intégrale quand** $a>0$ **:**

$-ax^2=-\dfrac{x^2}{2\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}\right)^2}$. Soit une variable T qui suit la loi normale de paramètres $(0,\frac{1}{2a})$.

Une densité de T est f_T définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f_T(x)=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2a}}\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\frac{1}{2a}}\right)=\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{a}}}\exp(-ax^2)$$

$\int_{-\infty}^{+\infty}f_T(x)dx=1\iff\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{a}}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-ax^2)dx=1$, donc

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2)dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}}$$

1–b)

C'est la même démonstration que dans la question précédente :

Pour $a > 0$ on a : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2 \exp(-ax^2+bx) = 0$, donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2+bx)dx$ converge

Pour $a < 0$, on a : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x \exp(-ax^2+bx) = +\infty$, donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2+bx)dx$ diverge

Pour $a = 0$: $\int_{-\infty}^{0} \exp(bx)dx$ diverge si $b \leq 0$, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(bx)dx$ aussi et

$\int_{0}^{\infty} \exp(bx)dx$ diverge si $b > 0$, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(bx)dx$ aussi

Conclusion : l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2+bx)dx$ converge si et seulement si $a > 0$

Calcul de l'intégrale quand $a > 0$:

On a : $-ax^2+bx = -a(x^2 - \frac{b}{a}x) = -a(x-\frac{b}{2a})^2 + \frac{b^2}{4a}$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2+bx)dx = \exp(\frac{b^2}{4a}) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-a(x-\frac{b}{2a})^2)dx.$$

Effectuons le changement de variable affine $u = x - \frac{b}{2a}$; $du = dx$; les bornes sont conservées et il vient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-a(x-\frac{b}{2a})^2)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-au^2)du$$

$$\boxed{\text{D'après le résultat du 1–a), } \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2+bx) = \exp(\frac{b^2}{4a})\sqrt{\frac{\pi}{a}}}$$

2–a)

$$\begin{aligned} D_U &= \{s \in \mathbb{R} \ / \ \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(sx)\exp(-\frac{x^2}{2})dx \quad \text{converge}\} \\ &= \{s \in \mathbb{R} \ / \ \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{x^2}{2}+sx)dx \quad \text{converge } \} \end{aligned}$$

d'après le 1–b) , $\boxed{D_U = \mathbb{R}}$

$$\boxed{\Phi_U(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(sx)\exp(-\frac{x^2}{2})dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}\exp(\frac{s^2}{4\times\frac{1}{2}}) = \exp(\frac{s^2}{2})}$$

2–b)

Déterminons la loi de$Z$. On a déjà $Z(\Omega) = \mathbb{R}_+$. Notons F_Z la fonction de répartition de Z et F_U celle de U.

$$\begin{aligned} \forall t \leq 0, \ F_Z(t) &= 0 \\ \forall t \geq 0, \ F_Z(t) &= P(U^2 \leq t) \\ &= P(-\sqrt{t} \leq U \leq \sqrt{t}) \\ &= F_U(\sqrt{t}) - F_U(-\sqrt{t}) \\ &= F_U(\sqrt{t}) - (1 - F_U(\sqrt{t})) \text{ (propriété de la loi normale centrée réduite)} \\ &= 2F_U(\sqrt{t}) - 1 \end{aligned}$$

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.

Si l'on note f_Z une densité de Z, on pourra prendre

$$f_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \dfrac{2}{2\sqrt{t}} f_U(\sqrt{t}) & \text{si } t > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-\dfrac{t}{2}) & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Sous réserve de convergence, $\Phi_Z(s) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(st) f_Z(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp(-(\frac{1}{2}-s)t)dt$

L'intégrale est impropre en 0 et $+\infty$, puisque sur $]0,+\infty[$ la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}} \exp(-(\frac{1}{2}-s)t)$ est continue.

∗ **En** 0, $\frac{1}{\sqrt{t}} \exp(-(\frac{1}{2}-s)t) \underset{(0)}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$. On sait que $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge d'après le critère de Riemann puisque $\sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}$ et $\frac{1}{2} < 1$. Par équivalence des fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} \exp(-(\frac{1}{2}-s)t)dt$ converge.

∗ **En** $+\infty$.

Si $\frac{1}{2} - s \leq 0$, alors $\frac{1}{\sqrt{t}} \exp(-(\frac{1}{2}-s)t) \geq \frac{1}{\sqrt{t}}$ car $-(\frac{1}{2}-s)t \geq 0$, donc $\exp(-(\frac{1}{2}-s)t) \geq 1$.

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ diverge, donc par minoration des fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp(-(\frac{1}{2}-s)t)dt$ diverge aussi.

Si $\frac{1}{2} - s > 0$, alors $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 \frac{1}{\sqrt{t}} \exp(-(\frac{1}{2}-s)t) = 0$, donc $\frac{1}{\sqrt{t}} \exp(-(\frac{1}{2}-s)t) \underset{(+\infty)}{=} \circ\Big(\frac{1}{t^2}\Big)$. Or l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge d'après le critère de Riemann $(2 > 1)$, on en déduit, par négligeabilité des fonctions continues positives, que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp(-(\frac{1}{2}-s)t)dt$ est convergente

Conclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp(-(\frac{1}{2}-s)t)dt$ converge si et seulement si $\frac{1}{2} - s > 0$, soit $s \in]-\infty; \frac{1}{2}[$

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-(\frac{1}{2}-s)t)dt$ converge si et seulement si $s \in]-\infty; \frac{1}{2}[$: $D_Z =]-\infty; \frac{1}{2}[$

- **Calcul de $\Phi_Z(s)$ pour $s < \frac{1}{2}$.**

$\Phi_Z(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-(\frac{1}{2}-s)t)dt$

Soit $0 < a < b$ et $I(a,b) = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-(\frac{1}{2}-s)t)dt$. Posons $t = u^2$, donc $u = \sqrt{t}$ et $du = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$

$$\begin{aligned} I(a,b) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \exp(-(\tfrac{1}{2}-s)u^2)du \\ \Phi_Z(s) &= \lim_{\substack{a\to 0 \\ b\to+\infty}} I(a,b) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \exp(-(\tfrac{1}{2}-s)u^2)du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-(\tfrac{1}{2}-s)u^2)du \quad \text{car la fonction que l'on intègre est paire} \end{aligned}$$

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.