



## EXERCICES DE MATHEMATIQUES



### ANALYSE : SERIES INTEGRALES

#### ENONCE DE L'EXERCICE-II

1) Soit pour  $n \geq 1$ , la suite  $(w_n)$  définie par  $w_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n\pi}}$ .

On considère les suites  $W_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} w_k$  et  $W_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} w_k$ . Montrer que ces deux suites sont adjacentes et en déduire que la série de terme général  $w_n$  est convergente.

2) Montrer que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$  converge (on pourra poser  $t = x^2$ ).

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on définit :

$$u_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(x^2) dx \text{ et } v_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} |\sin(x^2)| dx$$

3) Etudier la convergence des séries de termes généraux  $u_n$  et  $v_n$

Que peut-on en déduire quant à la nature de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} |\sin(x^2)| dx$  ?

## CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO II

1)

$$W_{2n+2} - W_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k\pi}} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k\pi}} = \frac{1}{\sqrt{(2n+2)\pi}} - \frac{1}{\sqrt{(2n+1)\pi}} < 0$$

$$W_{2n+3} - W_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k\pi}} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k\pi}} = -\frac{1}{\sqrt{(2n+3)\pi}} + \frac{1}{\sqrt{(2n+2)\pi}} > 0$$

La suite  $(W_{2n})_{n \geq 1}$  est décroissante et la suite  $(W_{2n+1})_{n \geq 0}$  est croissante.

$$W_{2n+2} - W_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{(2n+2)\pi}} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} (W_{2n+2} - W_{2n+1}) = 0$$

Les suites  $(W_{2n})_{n \geq 1}$  et  $(W_{2n+1})_{n \geq 0}$  sont adjacentes, elles convergent donc vers une même limite réelle. Il en résulte que la suite  $(W_n)_{n \geq 1}$  est convergente puisque les deux suites extraites d'indices pairs et impairs sont convergentes vers une même limite.

Par définition, cela signifie que la série de terme général  $w_n$  est **convergente**

2)

Les fonctions  $x \mapsto x^2$  et  $\sin$  sont continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , donc par composition, la fonction  $x \mapsto \sin(x^2)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , donc sur  $\mathbb{R}_+$ .

L'intégrale  $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$  est impropre en  $+\infty$  et elle converge si et seulement si l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \sin(x^2) dx$  converge.

• Soit  $A \geq 1$ . Posons  $J(A) = \int_1^A \sin(x^2) dx$ . Effectuons le changement de variable  $t = x^2$  ;  $dt = 2x dx$ , donc  $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$ .

$$J(A) = \frac{1}{2} \int_1^{A^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt.$$

Intégrons l'intégrale  $2J(A)$  par parties :

$u(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$  ;  $u'(t) = -\frac{1}{2t\sqrt{t}}$  ;  $v'(t) = \sin t$  ;  $v(t) = -\cos t$ . Les fonctions  $u$  et  $v$  sont de classe  $C^1$  sur  $[1, +\infty[$ , l'intégration par parties est légitimée.

$$2J(A) = \left[ -\frac{\cos t}{\sqrt{t}} \right]_1^{A^2} - \frac{1}{2} \int_1^{A^2} \frac{\cos t}{t\sqrt{t}} dt$$

$$= \left( -\frac{\cos A^2}{A} + \cos 1 \right) - \frac{1}{2} \int_1^{A^2} \frac{\cos t}{t\sqrt{t}} dt$$

• On a :  $0 \leq \left| \frac{\cos A^2}{A} \right| \leq \frac{1}{A}$  ; par le théorème d'encadrement,  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{\cos A^2}{A} = 0$

•  $\left| \frac{\cos t}{t\sqrt{t}} \right| \leq \frac{1}{t\sqrt{t}} = \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$