ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE–XXXVI

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues sur $[0;1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note E_1 le sous-espace vectoriel de E formé des applications de classe C^1 sur $[0;1]$ et à valeurs réelles.

Pour tout $f \in E$, on désigne par $L(f)$ la primitive de f qui vérifie $\displaystyle\int_0^1 L(f)(t)dt = 0$.

1) Vérifier que l'application L est ainsi bien définie et constitue une application linéaire de E vers E.

2–a) Déterminer le noyau de L.

b) Montrer que l'image de L est incluse dans E_1. La restriction de L à E_1 réalise-t-elle un automorphisme de E_1 ?

3) Montrer que pour tout t et tout x de $[0;1]$, on a $L(f)(t) = \displaystyle\int_0^1 \Big(\int_x^t f(u)du\Big)dx$.

4) On pose $L^0 = \mathrm{Id}$ et, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $L^n = L \circ L^{n-1}$.
Pour tout x de $[0;1]$, on pose alors $P_0(x) = 1$ et pour $n \geq 1$, $P_n(x) = L^n(P_0)(x)$.

a) Calculer $P_1,\ P_2,\ P_3$.

b) Montrer que pour tout x de $[0;1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P_n(x+1) - P_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

c) En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.