ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE–XXXVI

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues sur $[0;1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note E_1 le sous-espace vectoriel de E formé des applications de classe C^1 sur $[0;1]$ et à valeurs réelles.

Pour tout $f \in E$, on désigne par $L(f)$ la primitive de f qui vérifie $\displaystyle\int_0^1 L(f)(t)dt = 0$.

1) Vérifier que l'application L est ainsi bien définie et constitue une application linéaire de E vers E.

2–a) Déterminer le noyau de L.

b) Montrer que l'image de L est incluse dans E_1. La restriction de L à E_1 réalise-t-elle un automorphisme de E_1 ?

3) Montrer que pour tout t et tout x de $[0;1]$, on a $L(f)(t) = \displaystyle\int_0^1 \Big(\int_x^t f(u)du\Big)dx$.

4) On pose $L^0 = \mathrm{Id}$ et, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $L^n = L \circ L^{n-1}$.

Pour tout x de $[0;1]$, on pose alors $P_0(x) = 1$ et pour $n \geq 1$, $P_n(x) = L^n(P_0)(x)$.

a) Calculer P_1, P_2, P_3.

b) Montrer que pour tout x de $[0;1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P_n(x+1) - P_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

c) En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.