



## EXERCICES DE MATHEMATIQUES



### ALGÈBRE LINÉAIRE : MATRICES

#### ENONCE DE L'EXERCICE-XXIV

On cherche à déterminer l'ensemble des solutions de l'équation matricielle

$$A^2 = I_3 \quad (1)$$

où  $A$  est une matrice de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et  $I_3$  la matrice unité de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . On suppose également que  $A \neq I_3$ .

1) Soit  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  vérifiant (1). Montrer que  $\text{im}(A - I_3) \subset \text{ker}(A + I_3)$ . En déduire que l'une des matrices  $A - I_3$  ou  $A + I_3$  est de rang inférieur ou égal à 1.

2) Soit  $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  une matrice quelconque de rang inférieur ou égal à 1.

Montrer qu'il existe des réels  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3$  tels que le terme général  $b_{i,j}$  de la matrice  $B$  s'écrive  $b_{i,j} = \lambda_i \mu_j$ .

En déduire que  $B^2 = \text{tr}(B)B$  où  $\text{tr}(B)$  représente la trace de la matrice  $B$ , c'est-à-dire la somme de ses termes diagonaux.

3) On suppose que la matrice  $B = A - I_3$  de la première question est de rang 1. Montrer que  $\text{tr}(B) = -2$ .

4) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation matricielle (1).