ALGEBRE LINEAIRE : MATRICES

ENONCE DE L'EXERCICE–XXIV

On cherche à déterminer l'ensemble des solutions de l'équation matricielle

$$A^2 = I_3 \qquad \textbf{(1)}$$

où A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et I_3 la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On suppose également que $A \neq I_3$.

1) Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant (1). Montrer que $\mathrm{im}(A - I_3) \subset \ker(A + I_3)$. En déduire que l'une des matrices $A - I_3$ ou $A + I_3$ est de rang inférieur ou égal à 1.

2) Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice quelconque de rang inférieur ou égal à 1.

Montrer qu'il existe des réels $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3$ tels que le terme général $b_{i,j}$ de la matrice B s'écrive $b_{i,j} = \lambda_i \mu_j$.

En déduire que $B^2 = \mathrm{tr}(B)B$ où $\mathrm{tr}(B)$ représente la trace de la matrice B, c'est-à-dire la somme de ses termes diagonaux.

3) On suppose que la matrice $B = A - I_3$ de la première question est de rang 1. Montrer que $\mathrm{tr}(B) = -2$.

4) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation matricielle (1).