ANALYSE : SERIES

ENONCE DE L'EXERCICE–XVIII

Soit $a \in]0;1[$. On définit la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^a}$$

1) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\frac{(n+1)^{1-a}-1}{1-a} \leq S_n \leq \frac{n^{1-a}-1}{1-a} + 1$$

2) Déterminer un équivalent de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

3) On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $u_n = \dfrac{n^{1-a}-1}{1-a} - S_n$.

a) Etudier la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

b) Montrer qu'il existe un réel ℓ tel que $S_n = \dfrac{n^{1-a}-1}{1-a} + \ell + o(1)$.

4) Dans cette question on s'intéresse à la série $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^a}$.

a) Prouver la convergence de la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{n+1}}{k^a}\right)$.

b) En déduire la convergence de la série $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^a}$.

Calculer sa somme en fonction de ℓ et de a.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.