



## EXERCICES DE MATHÉMATIQUES



### ANALYSE : SÉRIES

#### ENONCE DE L'EXERCICE - XVIII

Soit  $a \in ]0; 1[$ . On définit la suite  $(S_n)_{n \geq 1}$  par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^a}$$

1) Montrer que, pour tout  $n \geq 1$ , on a

$$\frac{(n+1)^{1-a} - 1}{1-a} \leq S_n \leq \frac{n^{1-a} - 1}{1-a} + 1$$

2) Déterminer un équivalent de  $S_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

3) On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  définie par :  $u_n = \frac{n^{1-a} - 1}{1-a} - S_n$ .

a) Étudier la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$ .

b) Montrer qu'il existe un réel  $\ell$  tel que  $S_n = \frac{n^{1-a} - 1}{1-a} + \ell + o(1)$ .

4) Dans cette question on s'intéresse à la série  $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^a}$ .

a) Prouver la convergence de la suite  $\left( \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^a} \right)$ .

b) En déduire la convergence de la série  $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^a}$ .

Calculer sa somme en fonction de  $\ell$  et de  $a$ .