ANALYSE : INTEGRALES

ENONCE DE L'EXERCICE–XXVII

On pose, pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$G(x,y)=\int_0^y \frac{t-[t]}{t(t+x)}dt$$

où $[t]$ désigne la partie entière de t.

1) Sur quel sous-ensemble de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ la fonction G est-elle définie ?

2) Montrer que pour tout réel $x>0$, $G(x,y)$ admet une limite positive finie lorsque y tend vers $+\infty$. On notera par la suite $G(x)$ cette limite.

3) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $y>0$; montrer que

$$G(n,y)=\frac{1}{n}\Big(\int_0^n \frac{t-[t]}{t}dt-\int_y^{y+n}\frac{t-[t]}{t}dt\Big)$$

En considérant la suite de terme général $H_n=nG(n)$, en déduire que

$$G(n)=\ln\Big(\frac{e}{n}(n!)^{\frac{1}{n}}\Big)$$

4) Montrer que la série de terme général $H_n-H_{n-1}-\frac{1}{2n}$ est convergente.

En déduire un équivalent de $G(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

5) Donner un équivalent de $G(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO XXVII

1)

Notons g_x la fonction $t \mapsto \dfrac{t-[t]}{t(t+x)}$.

- Si $x > 0$, la fonction g_x est définie sur $\mathbb{R}_+^*$

Rappelons que la fonction $t \mapsto [t]$ est continue sur $\mathbb{R}_+ - \mathbb{N}$. Aux points $n \in \mathbb{N}^*$, elle est continue à droite et discontinue à gauche. Donc la fonction g_x est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ sauf aux points $n \in \mathbb{N}$.

En décomposant l'intervalle $[0;y]$ en $[0;1[\cup[1;2[\cup[n-1,n[\cup[n,y]$, on peut décomposer l'intégrale $\int_0^y g_x(t)dt$ en $\int_0^1 g_x(t)dt + \int_1^2 g_x(t)dt + \cdots + \int_{n-1}^n g_x(t)dt + \int_n^y g_x(t)dt$.

- Sur chaque intervalle $[k,k+1[$ $(1 \leq k \leq n-1)$ la restriction de g_x est prolongeable par continuité à gauche car $\lim\limits_{t\to(k+1)^+} \dfrac{t-[t]}{t(t+x)} = \dfrac{1}{(k+1)(k+1+x)} \in \mathbb{R}$; les intégrales sont faussement impropres, donc convergentes.

- L'intégrale $\int_n^y g_x(t)dt$ se traite de la même façon si $y \in \mathbb{N}^*$, sinon il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fermé.

- L'intégrale $\int_0^1 g_x(t)dt$ est impropre en 0. Au voisinage de $0^+, [t] = 0$, donc $g_x(t) = \dfrac{t}{t(t+x)} = \dfrac{1}{t+x}$.

La fonction g_x est prolongeable par continuité en 0^+, l'intégrale $\int_0^1 g_x(t)dt$ est faussement impropre, donc convergente.

Si $x > 0$, $G(x,y)$ **est définie sur** $(\mathbb{R}_+^*)^2$

- Si $x = 0$, alors $g_x(t) = \dfrac{t-[t]}{t^2} = \dfrac{1}{t}$ au voisinage de 0^+. L'intégrale $\int_0^y g_x(t)dt$ est divergente.

$G(0,y)$ **n'est pas définie.**

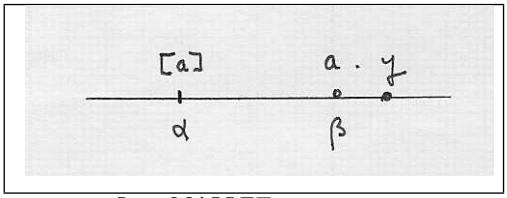
- Si $x < 0$, notons $x = -a$ avec $a > 0$.

$g_{-a}(t) = \dfrac{t-[t]}{t(t-a)}$. Sur l'intervalle $[0,y]$, g_{-a} n'est pas définie en 0 (déja vu) et en a **à conditions que** $a \in]0,y]$**, c'est-à-dire que** $-x \leq y$.

Si $-x > y$ **c'est-à-dire** $x < -y$**,** $G(x,y)$ **est définie**

Regardons maintenant le cas où $0 < a \leq y$.

$*$ Si $a \notin \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto t-[t]$ est continue sur un intervalle $]\alpha,\beta] \subset]0,y]$ contenant a.



© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.