BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2012

Conceptions : H.E.C.

Code épreuve : 289

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES

Mercredi 2 mai 2012, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : **l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

EXERCICE

Soit m un réel donné strictement positif et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donnée par : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix}$.

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.
Pour tout endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$, on pose g^0=Id et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $g^k = g \circ g^{k-1}$.

1. Déterminer le noyau $\mathrm{Ker} f$ et l'image $\mathrm{Im} f$ de l'endomorphisme f. La matrice M est-elle inversible ?

2.a) Montrer que la matrice M^2 est une combinaison linéaire de I et de M.
   b) Déterminer un polynôme annulateur non nul de la matrice M.
   c) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de M. La matrice M est-elle diagonalisable ?

3. À l'aide des résultats de la question 2.c), indiquer une méthode, sans faire les calculs, qui permettrait d'obtenir pour tout n de $\mathbb{N}$, l'expression de M^n en fonction de n.

4. On pose : $p = \frac{1}{3}(f+ \mathrm{Id})$ et $q = -\frac{1}{3}(f-2\,\mathrm{Id})$.
   a) Calculer $p \circ q$ et $q \circ p$, puis pour tout n de $\mathbb{N}$, p^n et q^n.
   b) En déduire pour tout n de $\mathbb{N}$, l'expression de f^n en fonction de p et q.
   c) Déterminer les deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $M^n = a_n I + b_n M$.
   d) La formule précédente reste-t-elle valable si n appartient à $\mathbb{Z}$?

PROBLÈME

Sous réserve d'existence, on note $E(U)$ et $V(U)$ respectivement, l'espérance mathématique et la variance d'une variable aléatoire U définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour p entier supérieur ou égal à 2, on dit que les variables aléatoires à densité $U_1, \ldots, U_p$ sont indépendantes si pour tout p-uplet $(u_1, \ldots, u_p)$ de réels, les événements $[U_1 \leqslant u_1], \ldots, [U_p \leqslant u_p]$ sont indépendants.

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés d'une loi de probabilité utilisée notamment en fiabilité. Les parties I et II sont largement indépendantes. La partie III est indépendante des parties I et II .

Partie I. Loi à 1 paramètre

On note λ un paramètre réel strictement positif. On considère la fonction f_λ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

1.a) Montrer que la fonction f_λ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Dresser le tableau de variation de f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$ et préciser les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0^+} f_\lambda(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\lambda(x)$.

c) Établir la convexité de la fonction f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) Tracer l'allure de la courbe représentative de f_1 dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

2.a) Vérifier que la fonction $x \longmapsto -\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}}$ est une primitive de f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_\lambda(x)\mathrm{d}x$ et calculer sa valeur.

c) En déduire que la fonction f_λ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

3. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs strictement positives, ayant f_λ pour densité. On note F_λ la fonction de répartition de X et on pose : $Y = \lambda\sqrt{X}$.

a) Calculer pour tout x réel, $F_\lambda(x)$.

b) Montrer que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.

c) Établir pour tout r de $\mathbb{N}^*$, l'existence de $E(Y^r)$.

d) Montrer que pour tout r de $\mathbb{N}^*$, on a : $E(Y^{r+1}) = (r+1)E(Y^r)$.

e) En déduire pour tout r de $\mathbb{N}^*$, $E(Y^r)$ et $E(X^r)$. En particulier, calculer $E(X)$ et $V(X)$.

4. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi que X. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de réels strictement positifs vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 a_n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 b_n = 0$.

On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $M_n = \min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(X_k)$ et $J_n = \dfrac{M_n - b_n}{a_n}$. On admet que M_n et J_n sont des variables aléatoires à densité définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Partie II. Estimation ponctuelle de λ

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on note $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes et de même loi que la variable aléatoire X définie dans la question 3.

On rappelle que $Y = \lambda\sqrt{X}$, et on pose pour tout k de $[\![1, n]\!]$: $Y_k = \lambda\sqrt{X_k}$, $S_k = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} Y_j$ et g_k une densité de S_k.

On admet que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, les variables aléatoires $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ sont indépendantes et que pour tout k de $[\![1, n-1]\!]$, les variables aléatoires S_k et Y_{k+1} sont indépendantes.

On admet que si T et Z sont deux variables aléatoires à densité indépendantes définies sur le même espace probabilisé, de densités respectives f_T et f_Z telles que f_T (ou f_Z) soit bornée, alors la variable aléatoire $T + Z$ admet une densité f_{T+Z} définie pour tout x réel par : $f_{T+Z}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_T(y) f_Z(x-y)\mathrm{d}y$.

5.a) En utilisant les propriétés admises, montrer que : $g_2(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$.

b) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

c) On admet que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{S_n}$ est une variable aléatoire à densité. Pour quelles valeurs de n, l'espérance $E(1/S_n)$ et la variance $V(1/S_n)$ existent-elles ? Calculer alors leurs valeurs respectives.

6. On note $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un n-uplet de $(\mathbb{R}_+^*)^n$ constituant une réalisation du n-échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. On suppose que le paramètre λ est inconnu. Soit H la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$H(\lambda) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} f_\lambda(x_k)\right)$$

Montrer que la fonction H admet un maximum atteint en un unique point λ_0 dont on donnera la valeur.

7. On pose pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $\lambda_n^* = \dfrac{n}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{X_k}}$.

a) Que représente λ_0 pour λ_n^* ?

b) Construire à partir de λ_n^* un estimateur sans biais $\widehat{\lambda}_n$ de λ et calculer le risque quadratique $\rho(\widehat{\lambda}_n)$ de $\widehat{\lambda}_n$.

c) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \rho(\widehat{\lambda}_n)$. Commenter.

Partie III. Loi à 2 paramètres

8. Soit λ et α deux paramètres réels strictement positifs et $f_{(\lambda,\alpha)}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_{(\lambda,\alpha)}(x) = \begin{cases} \lambda\alpha x^{\alpha-1}\exp(-\lambda x^\alpha) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

où exp désigne la fonction exponentielle.

a) Montrer que $f_{(\lambda,\alpha)}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Soit W une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs strictement positives, de densité $f_{(\lambda,\alpha)}$. On dit que W suit la loi $\mathcal{WB}(\lambda,\alpha)$.

b) On note $F_{(\lambda,\alpha)}$ la fonction de répartition de W. Calculer pour tout x réel, $F_{(\lambda,\alpha)}(x)$.

c) Montrer que la variable aléatoire $F_{(\lambda,\alpha)}(W)$ suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

d) Écrire une fonction Pascal d'en-tête `function W(lambda,alpha :real) :real ;` permettant de simuler W.

9. Soit K une variable aléatoire à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs strictement positives, de densité f_K nulle sur $\mathbb{R}_-$, continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.
On note F_K la fonction de répartition de K.
On pose pour tout x réel : $R(x) = -\ln\big(1 - F_K(x)\big)$ et $r(x) = R'(x)$ (où R' est la fonction dérivée de R).

a) On suppose dans cette question que K suit la loi $\mathcal{WB}(\lambda,2)$ avec $\lambda > 0$.
Établir les propriétés (i) et (ii) suivantes :

(i) la fonction r est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et $r(0) = 0$.

(ii) la variable aléatoire $r(K)$ suit la loi $\mathcal{WB}\left(\dfrac{1}{4\lambda},2\right)$.

b) Réciproquement, on suppose dans cette question que les propriétés (i) et (ii) sont vérifiées.
Montrer que K suit la loi $\mathcal{WB}(\lambda,2)$. Conclusion.

Dans les questions 10 et 11, l'entier n est supérieur ou égal à 2. On note $w_1, w_2, \ldots, w_n$ des réels strictement positifs et non tous égaux.

10. Soit φ la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(x) = \dfrac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(w_k)^x(\ln w_k)}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(w_k)^x} - \dfrac{1}{x}$.

a) Soit $y_1, y_2, \ldots, y_n$ des réels non tous nuls et $z_1, z_2, \ldots, z_n$ des réels quelconques.

En étudiant la fonction polynomiale du second degré Q définie sur $\mathbb{R}$ par $Q(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(z_k - ty_k)^2$, établir l'inégalité : $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k z_k\right)^2 \leqslant \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right) \times \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k^2\right)$.

b) Montrer que la fonction φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) On note n_0 le nombre d'entiers k_0 de $[\![1, n]\!]$ vérifiant $w_{k_0} = \displaystyle\max_{1 \leqslant k \leqslant n}(w_k)$. Montrer que : $1 \leqslant n_0 \leqslant n-1$.

d) Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(w_k)^x$ en fonction de n_0 et w_{k_0}, lorsque x tend vers $+\infty$.

e) Calculer en fonction de w_{k_0}, la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
(on distinguera les deux cas : $w_{k_0} = 1$ et $w_{k_0} \neq 1$)

f) En déduire que sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation $\varphi(x) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\ln w_k)$ admet une unique solution.

11. On note $(W_1, W_2, \ldots, W_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes et de même loi $\mathcal{WB}(\lambda,\alpha)$ définie dans la question 8, dont une réalisation est le n-uplet $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$. On suppose que les paramètres λ et α sont inconnus.

Soit G la fonction de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $G(\lambda, \alpha) = \ln\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} f_{(\lambda,\alpha)}(w_k)\right)$.

a) Montrer que la fonction G admet un unique point critique $(\widehat{\lambda}, \widehat{\alpha})$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

b) Montrer que la fonction G admet un maximum local au point $(\widehat{\lambda}, \widehat{\alpha})$.

ANNALES DE MATHEMATIQUES

HEC, ESCP-EAP, EM-LYON 2012 VOIE ECO

CORRIGE

EXERCICE

1)

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;

$$(x,y,z) \in \operatorname{Ker} f \iff \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} & \frac{1}{m^2} \\ m & 0 & \frac{1}{m} \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{1}{m}y + \frac{1}{m^2}z & = 0 \\ mx + \frac{1}{m}z & = 0 \\ m^2x + my & = 0 \end{cases}$$

Effectuons $L_1 \longleftarrow mL_1 - L_2 - \frac{1}{m}L_3$, opération légitime puisque $m \neq 0$. On obtient le système équivalent

$$\begin{cases} -2mx & = 0 \\ mx + \frac{1}{m}z & = 0 \\ m^2x + my & = 0 \end{cases}$$

C'est un système de Cramer, il n'admet que la solution $(0, 0, 0)$.

$$\boxed{\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}}$$

Remarque : ne pas penser que l'on ne peut résoudre ce système qu'en utilisant une combinaison linéaire " astucieuse " des 3 lignes. On peut appliquer la méthode traditionnelle de Gauss. On peut faire successivement

$L_1 \longleftarrow m^2L_1$ et $L_2 \longleftarrow mL_2$; on obtient $\begin{cases} my + z & = 0 \\ m^2x + z & = 0 \\ m^2x + my & = 0 \end{cases}$

$L_1 \longleftrightarrow L_3$, puis $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$; on obtient $\begin{cases} m^2x + my & = 0 \\ -my + z & = 0 \\ my + z & = 0 \end{cases}$

Enfin $L_3 \longleftarrow L_3 + L_2$; on obtient $\begin{cases} m^2x + my & = 0 \\ -my + z & = 0 \\ 2z & = 0 \end{cases}$

D'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Ker} f = 3 - 0 = 3$.

$\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}^3$ et $\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 \Longrightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$. L'endomorphisme f est surjectif et on vient de voir que f est injectif puisque $\operatorname{Ker} f = \{(0, 0, 0)\}$, donc

$$\boxed{f \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}^3\text{, sa matrice } M \text{ est donc inversible}}$$

Remarque : on pouvait dire également : f est un endomorphisme injectif d'un espace de dimension finie ($\dim \mathbb{R}^3 = 3$), donc c'est un automorphisme.

2–a)

Le calcul sans difficulté donne $\boxed{M^2 = M + 2I}$

2–b)

- $M^2 = M + 2I \iff M^2 - M - 2I = (0)$. Le polynôme $Q\ :\ x \mapsto x^2 - x - 2$ est annulateur (non nul) de M. Il possède une racine évidente $x = -1$, donc $Q(x) = (x+1)(x-2)$

$$\boxed{\text{D'après le cours, les seules valeurs propres possibles de } M \text{ (donc de } f\text{) sont } -1 \text{ ou } 2}$$

Rappelons que le sous-espace propre $E_\lambda(M)$ de M associé à une valeur propre λ est un sous-espace de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Le sous-espace propre $E_\lambda(f)$ de f associé à la valeur propre λ est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ et que

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ appartient à $E_\lambda(M) \iff u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ appartient à $E_\lambda(f)$

- Etude de $E_{-1}(M)$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1}(M) \quad &\iff \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} & \frac{1}{m^2} \\ m & 0 & \frac{1}{m} \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} x + \frac{1}{m}y + \frac{1}{m^2}z & = 0 \\ mx + y + \frac{1}{m}z & = 0 \\ m^2x + my + z & = 0 \end{cases} \\
&\iff \quad m^2x + my + z = 0 \quad \text{car } L_3 = m^2L_1 \text{ et } L_2 = mL_1
\end{aligned}$$

Ceci prouve que $E_{-1}(M) \neq \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$; c'est donc effectivement un sous-espace propre : -1 est une valeur propre de M.

Poursuivons l'étude pour trouver une base de $E_{-1}(M)$.

$$E_{-1}(M) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -m^2x - my \end{pmatrix} \ /\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -m^2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -m \end{pmatrix} \ /\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Donc $E_{-1}(M) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -m^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -m \end{pmatrix} \right)$. De plus ces deux matrices (ou deux vecteurs) forment une famille libre car ils ne sont pas proportionnels, on en conclut qu'ils forment une base de $E_{-1}(M)$.

$$\boxed{E_{-1}(M) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -m^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -m \end{pmatrix} \right) \ ;\ \dim E_{-1}(M) = 2}$$

- Etude de $E_2(M)$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(M) \quad &\iff \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} & \frac{1}{m^2} \\ m & 0 & \frac{1}{m} \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} -2x + \frac{1}{m}y + \frac{1}{m^2}z & = 0 \\ mx - 2y + \frac{1}{m}z & = 0 \\ m^2x + my - 2z & = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Effectuons $L_2 \longleftarrow 2L_2 + mL_1$ et $L_3 \longleftarrow 2L_3 + m^2L_1$: on trouve

$$\begin{cases} -2x + \dfrac{1}{m}y + \dfrac{1}{m^2}z & = 0 \\ \quad -3y + \dfrac{3}{m}z & = 0 \\ \quad 3my - 3z & = 0 \end{cases}$$

On remarque que $L_3 = -mL_2$, donc $L_3 \longleftarrow L_3 + mL_2$ donne

$$\begin{cases} -2x + \dfrac{1}{m}y + \dfrac{1}{m^2}z & = 0 \\ \quad -3y + \dfrac{3}{m}z & = 0 \\ \quad 0 & = 0 \end{cases}$$

Le système équivaut successivement à

$$\begin{cases} -2x + \dfrac{1}{m}y + \dfrac{1}{m^2}z & = 0 \\ \quad -3y + \dfrac{3}{m}z & = 0 \end{cases} \text{ puis à } \begin{cases} -2x + \dfrac{1}{m}y + \dfrac{1}{m^2}z & = 0 \\ \quad y & = \dfrac{1}{m}z \end{cases} \text{ et finalement à : } \begin{cases} x & = \dfrac{1}{m^2}z \\ y & = \dfrac{1}{m}z \end{cases}$$

$$E_2(M) = \left\{ z \begin{pmatrix} \frac{1}{m^2} \\ \frac{1}{m} \\ 1 \end{pmatrix} \ / \ z \in \mathbb{R} \right\} = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{m^2} \\ \frac{1}{m} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\boxed{E_2(M) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ m \\ m^2 \end{pmatrix} \right) : \dim E_2(M) = 1}$$

> En conclusion : $\text{spect}(M) = \text{spect}(f) = \{-1, 2\}$
>
> $E_{-1}(M) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -m^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -m \end{pmatrix} \right)$; $E_2(M) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ m \\ m^2 \end{pmatrix} \right)$
>
> $E_{-1}(f) = \text{vect}((1, 0, -m^2),\ (0, 1, -m))$, $E_2(f) = \text{vect}((1, m, m^2))$
>
> $\dim E_{-1}(f) + \dim E_2(f) = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \Longrightarrow f$ diagonalisable

Remarque : on aurait pu dire :

$\dim E_{-1}(M) + \dim E_2(M) = 3 = \dim \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \Longrightarrow M$ (donc f) diagonalisable.

3)

Raisonnons avec l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ associé canoniquement à M.

On obtient une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f en réunissant et ordonnant (ou en concaténant) les deux bases précédentes de $E_{-1}(f)$ et $E_2(f)$. Cette base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f est : $\mathcal{B} = ((1, 0, -m^2),\ (0, 1, -m),\ (1, m, m^2))$.

Dans cette base, la matrice de f est $D = \text{Diag}(-1, -1, 2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

La matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & m \\ -m^2 & -m & m^2 \end{pmatrix}$.

D'après le cours on a l'égalité : $M = PDP^{-1}$.

Un calcul par récurrence classique (que nous laissons au soin du lecteur) donne :

$\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = PD^nP^{-1}$ avec la convention habituelle $M^0 = D^0 = I$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1}}$$

4–a)

$$\begin{aligned}
p\circ q &= (\tfrac{1}{3}(f+\mathrm{Id}))\circ(-\tfrac{1}{3}(f-2\,\mathrm{Id}))\\
&= -\frac{1}{9}(f+\mathrm{Id})\circ(f-2\,\mathrm{Id})\\
&= -\frac{1}{9}(f^2-2f\circ\mathrm{Id}+\mathrm{Id}\circ f-2\,\mathrm{Id}^2)\\
&= -\frac{1}{9}(f^2-f-2\,\mathrm{Id}) \quad \text{car } f\circ\mathrm{Id}=\mathrm{Id}\circ f=f \text{ et } \mathrm{Id}^2=\mathrm{Id}
\end{aligned}$$

On a vu à la question 2) que $M^2-M-2I=(0)$, donc $f^2-f-2\,\mathrm{Id}=\Theta$ (endomorphisme nul de $\mathbb{R}^3$)

Donc $\boxed{p\circ q=\Theta}$; on montre de la même manière que $\boxed{q\circ p=\Theta}$

Plaçons nous dans la base $\mathcal{B}$ de la question précédente. Dans cette base, la matrice de p est

$$\frac{1}{3}(D+I)=\frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ p^n$ a pour matrice $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. Donc $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ p^n=p}$

On montre de même que $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ q^n=q}$ car la matrice de q dans la base $\mathcal{B}$ est

$$-\frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Attention, on a $p^0=q^0=\mathrm{Id}$.

4–b)

$p=\frac{1}{3}(f+\mathrm{Id})\iff f=3p-\mathrm{Id}$. Les endomorphismes p et Id commutent, on peut donc développer $(3p-\mathrm{Id})^n$ par la formule du binôme de Newton. Rappelons que $p^0=\mathrm{Id}$ et $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ p^k=p$ d'après la question 4–a).

$$\begin{aligned}
\forall n\in\mathbb{N}^*,\ f^n &= (3p-\mathrm{Id})^n\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(3p)^k\circ(-\mathrm{Id})^{n-k}\\
&= \binom{n}{0}(3p)^0\circ(-\mathrm{Id})^n+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(3p)^k\circ(-\mathrm{Id})^{n-k}\\
&= (-1)^n\,\mathrm{Id}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^kp^k\circ(-1)^{n-k}\,\mathrm{Id}\\
&= (-1)^n\,\mathrm{Id}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^k(-1)^{n-k}p\circ\mathrm{Id}\\
&= (-1)^n\,\mathrm{Id}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^k(-1)^{n-k}p\\
&= (-1)^n\,\mathrm{Id}+\Big(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^k(-1)^{n-k}\Big)p\\
&= (-1)^n\,\mathrm{Id}+\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k(-1)^{n-k}-(-1)^n\Big)p\\
&= (-1)^n\,\mathrm{Id}+((3-1)^n-(-1)^n)p\\
&= (-1)^n\,\mathrm{Id}+(2^n-(-1)^n)p
\end{aligned}$$

Remarquons que $p+q=(\frac{1}{3}(f+\mathrm{Id}))+(-\frac{1}{3}(f-2\,\mathrm{Id}))=\mathrm{Id}$, donc

$f^n=(-1)^n(p+q)+(2^n-(-1)^n)p=2^np+(-1)^nq$. Ce résultat s'applique pour $n=0$ car $2^0p+(-1)^0q=p+q=\mathrm{Id}=f^0$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ f^n = 2^n p + (-1)^n q}$$

4−c)

Dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, l'égalité précédente s'écrit :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ M^n &= \frac{2^n}{3}(M+I) - \frac{(-1)^n}{3}(M-2I)\\ &= \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} I + \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} M\end{aligned}$$

Les matrices I et M ne sont pas proportionnelles, elles forment une famille libre. Par conséquent il existe une seule suite (a_n) et une seule suite (b_n) répondant à l'égalité $M^n = a_n I + b_n M$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} \text{ et } b_n = \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3}}$$

4−d)

On sait que M est inversible puisque 0 n'est pas valeur propre de M.

Faisons un raisonnement par récurrence.

- Initialisation : $M^2 - M - 2I = (0) \Longleftrightarrow M(M-I) = 2I \Longleftrightarrow M\Big(\frac{1}{2}(M-I)\Big) = I$.

Donc $M^{-1} = \frac{1}{2}(-I+M) = -\frac{1}{2}I + \frac{1}{2}M$.

$a_{-1} = \frac{1}{3}(\frac{1}{2} - 2) = \frac{1}{3}\frac{-3}{2} = -\frac{1}{2}$; $b_{-1} = \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{2}+1\Big) = \frac{1}{3}\frac{3}{2} = \frac{1}{2}$.

- Supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$ fixé, $M^{-n} = a_{-n}I + b_{-n}M$.

$$\begin{aligned}M^{-(n+1)} &= M^{-n-1} = M^{-n}M^{-1}\\ &= (a_{-n}I + b_{-n}M)\frac{1}{2}(-I+M) \quad \text{(par hypothèse de récurrence)}\\ &\frac{1}{2}(-a_{-n}I + a_{-n}M - b_{-n}M + b_{-n}M^2)\\ &= \frac{1}{2}(-a_{-n}I + a_{-n}M - b_{-n}M + b_{-n}(2I+M)) \quad \text{car } M^2 = 2I + M\\ &= \frac{1}{2}\Big((2b_{-n} - a_{-n})I + a_{-n}M\Big)\end{aligned}$$

Calculons.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(2b_{-n} - a_{-n}) &= \frac{1}{2}(\frac{2(2^{-n} + (-1)^{-n+1}}{3}) - \frac{2^{-n} + 2(-1)^{-n}}{3})\\ &= \frac{1}{6}(2.2^{-n} - 2^{-n} + 2(-1)^{-n+1} - 2(-1)^{-n}) = \frac{1}{6}(2^{-n} + 4(-1)^{-n+1)})\\ &= \frac{1}{3}(\frac{2^{-n}}{2} + 2(-1)^{-n+1}) = \frac{1}{3}(2^{-n-1} + 2(-1)^{-n-1}) \quad \text{car } (-1)^{-n+1} = (-1)^{-n-1}(-1)^2\\ &= \frac{1}{3}(2^{-(n+1)} + 2(-1)^{-(n+1)}) = a_{-(n+1)}.\\ \frac{1}{2}a_{-n} &= \frac{2^{-n} + 2(-1)^{-n}}{6} = \frac{2^{-n}}{2\times 3} + \frac{(-1)^{-n}}{3}\\ &= \frac{2^{-(n+1)} + (-1)^{-(n+1)+1}}{3} = b_{-(n+1)}\end{aligned}$$

La propriété est héréditaire et par principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z},\ M^n = a_n I + b_n M \text{ avec } a_n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} \text{ et } b_n = \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3}}$$

