SERIES ; INTEGRALES

ENONCE DE L'EXERCICE–XXXI

Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ à valeurs réelles et λ un réel donné. On définit une suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 0}$, définies sur l'intervalle $[0;1]$, par :

$$\text{Pour tout } x \in [0;1] \quad \begin{cases} u_0(x) & = f(x) \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}(x) & = \displaystyle\int_0^x \lambda u_n(t)dt \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout $n \geq 0$, u_n est de classe C^n sur $[0,1]$ et donner, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, les différentes dérivées $u_n^{(k)}$ de u_n. En déduire

$$u_{n+1}(x) = \int_0^x \lambda^{n+1}\frac{(x-t)^n}{n!}f(t)dt$$

2–a) Montrer que pour tout $x \in [0;1]$, la série de terme général $u_n(x)$ est convergente.

b) Soit u un réel. Montrer qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_0$,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{|u|^k}{k!} \leq \frac{2|u|^{n+1}}{(n+1)!}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k(x)$ à l'aide d'une intégrale.

d) Soit $t \in [0;x]$ et $x \in [0;1]$.

En écrivant $e^{\lambda(x-t)}$ sous forme d'une série, exprimer $U(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ en fonction de $f(x)$, e^x et $\displaystyle\int_0^x e^{-\lambda t}f(t)dt$.

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO XXXI

1)

- Procédons par récurrence.

Pour $n=0$, la fonction u_0 vaut f, donc $u_0 \in C^0([0;1],\mathbb{R})$ par hypothèse.
Supposons que pour un entier n donné, $u_n \in C^n([0;1],\mathbb{R})$.

$\forall x \in [0;1],\ u_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x \lambda u_n(t)dt$. Donc $\forall x \in [0;1],\ u'_{n+1}(x) = \lambda u_n(x)$.

Ce qui s'écrit : $u'_{n+1} = \lambda u_n$.
Par hypothèse de récurrence, $u_n \in C^n([0;1],\mathbb{R})$, donc u'_{n+1} aussi et par suite $u_{n+1} \in C^{n+1}([0;1],\mathbb{R})$. La propriété est héréditaire et par principe du raisonnement par récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in C^n([0;1],\mathbb{R})$$

- Pour tout $x \in [0;1]$ et pour tout $n \geq 1$, $u'_n(x) = \lambda u_{n-1}(x)$, donc $u''_n(x) = \lambda u'_{n-1}(x)$. Or $u'_{n-1}(x) = \lambda u_{n-2}(x)$, donc $u''_n(x) = \lambda^2 u_{n-2}(x)$.

Cela suggère de montrer que : $\forall k \in [\![0,n]\!],\ u_n^{(k)} = \lambda^k u_{n-k}$.
Procédons à nouveau par récurrence.
Cette propriété est vraie pour $k=0,1$. Cela suffit...
Supposons que pour un entier $k \in [\![0,n-1]\!],\ u_n^{(k)} = \lambda^k u_{n-k}$.
Dérivons cette égalité :
$u_n^{(k+1)} = (u_n^{(k)})' = \lambda^k u'_{n-k} = \lambda^k \lambda u_{n-k-1}$ d'après la définition de la suite (u_n). Donc $u_n^{(k+1)} = \lambda^{k+1} u_{n-(k+1)}$. La propriété est héréditaire donc

$$\boxed{\forall k \in [\![0,n]\!],\ u_n^{(k)} = \lambda^k u_{n-k}}$$

Remarquons que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_k(0) = 0$, donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k\ /\ 0 \leq k \leq n-1,\ u_n^{(k)}(0) = 0}$

Pour tout $n \geq 1$ et tout entier $k \in [\![0,n-1]\!]$, $u_n^{(k)}(0) = \lambda^k u_{n-k}(0) = 0$ puisque $n-k \geq 1$.
L'application u_{n+1} est de classe C^{n+1} sur $[0;1]$. On peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n.

$\forall x \in [0;1],\ u_{n+1}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} u_{n+1}^{(k)}(0) + \int_0^x u_{n+1}^{(n+1)} t \frac{(x-t)^n}{n!} dt.$

$u_{n+1}^{(k)}(0) = 0$ car $k \leq n$; $u_{n+1}^{(n+1)} t = \lambda^{n+1} u_0(t) = \lambda^{n+1} f(t)$. Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0;1],\ u_{n+1}(x) = \lambda^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)dt}$$

2–a)

Pour $n \geq 1,\ \forall x \in [0;1],\ u_n(x) = \lambda^n \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt.$

Puisque $0 \leq x$, on a l'inégalité suivante : $|u_n(x)| \leq \dfrac{|\lambda^n|}{(n-1)!} \displaystyle\int_0^x (x-t)^{n-1} |f(t)| dt.$

En effet, sur $[0;x]$, $x-t \geq 0$, donc $|(x-t)^{n-1}| = (x-t)^{n-1}$.
La fonction $|f|$ est continue sur $[0;1]$, donc elle y est majorée.

