MATRICES ; FONCTIONS DE 2 VARIABLES

ENONCE DE L'EXERCICE–XXXIV

On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des matrices réelles d'ordre 2, symétriques, de rang inférieur ou égal à 1 et dont les valeurs propres sont positives ou nulles.

1) Donner un exemple d'élément de $\mathcal{T}$.

2) Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $U.{}^tU$ est élément de $\mathcal{T}$.

3–a) Réciproquement, soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de rang égal à 1. Montrer qu'il existe deux vecteurs U et V de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ tels que $M = U.{}^tV$.

b) On suppose de plus que M est symétrique. Montrer que la famille (U, V) est liée.

c) En déduire que si M est élément de $\mathcal{T}$, alors il existe un vecteur $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ tel que $M = X.{}^tX$.

On définit l'application ψ sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$\psi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Soit p un réel appartenant à $]0, \frac{1}{2}[$ et $q = 1 - p$. Soit $A = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$.

Dans ce qui suit, on cherche à déterminer $\inf_{M \in \mathcal{T}} \psi(A - M)$.

4–a) Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Exprimer $F(x, y) = \psi(A - U.{}^tU)$ en fonction de x et y.

b) Déterminer les points critiques de F.

c) En déduire les extremums de F.

d) En déduire le minimum de $\psi(A - U.{}^tU)$, lorsque U décrit $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

5) Répondre à la question posée.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO XXXIV

1)

La matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{T}$. En effet, elle est symétrique. Un calcul facile montre que ses valeurs propres sont 0 et 2. Le rang de J vaut 1 car les colonnes sont non nulles et égales.

2)

Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$; $T = U({}^tU) = \begin{pmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix}$

Cette matrice est symétrique.

Les deux colonnes sont proportionnelles à $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, donc $\boxed{\text{rang } (U) \leq 1}$

Cherchons les valeurs propres de T. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

λ est valeur propre de T si et seulement si rang $(U({}^tU) - \lambda I_2) \leq 1$.

$$U({}^tU) - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} x^2 - \lambda & xy \\ xy & y^2 - \lambda \end{pmatrix} \; L_2 \longleftrightarrow L_1$$

$$\sim \begin{pmatrix} xy & y^2 - \lambda \\ x^2 - \lambda & xy \end{pmatrix}$$

* Si $x = 0$, $U({}^tU) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres sont 0 et y^2 (peut-être confondues) : elles sont positives ou nulles.

* Si $y = 0$, $U({}^tU) = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres sont 0 et x^2 : elles sont positives ou nulles.

* Si $xy \neq 0$, effectuons $L_2 \longleftarrow xyL_2 - (x^2 - \lambda)L_1$.

$U({}^tU) - \lambda I_2 \sim \begin{pmatrix} xy & y^2 - \lambda \\ 0 & P(\lambda) \end{pmatrix}$ avec

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (xy)^2 - (x^2 - \lambda)(y^2 - \lambda) \\ &= x^2y^2 - (x^2y^2 - \lambda(x^2 + y^2) + \lambda^2) \\ &= \lambda(-\lambda + (x^2 + y^2)) \end{aligned}$$

Les valeurs propres sont 0 et $x^2 + y^2$: elles sont positives ou nulles.

Dans tous les cas, $\boxed{\text{spect } (T) \subset \mathbb{R}_+}$

$\boxed{\text{La matrice } U({}^tU) \text{ appartient à } \mathcal{T}}$

3–a)

Soit $B = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et φ l'endomorphisme canoniquement associé à M.

rang $(M) = 1 \iff$ rang $(\varphi) = 1$. Il existe donc $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ tel que $\text{Im}\,\varphi = \text{vect}(v)$. Il en résulte que :

$\exists\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ tel que $\varphi(e_1) = \lambda v$ et $\varphi(e_2) = \mu v$.

$$M = \text{Mat}_B(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda a & \mu a \\ \lambda b & \mu b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} (\lambda \quad \mu).$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.