EXERCICES DE MATHEMATIQUES

MATRICES ; FONCTIONS DE 2 VARIABLES

ENONCE DE L'EXERCICE–XXXIV

On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des matrices réelles d'ordre 2, symétriques, de rang inférieur ou égal à 1 et dont les valeurs propres sont positives ou nulles.

1) Donner un exemple d'élément de $\mathcal{T}$.

2) Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $U.{}^tU$ est élément de $\mathcal{T}$.

3–a) Réciproquement, soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de rang égal à 1. Montrer qu'il existe deux vecteurs U et V de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ tels que $M = U.{}^tV$.

b) On suppose de plus que M est symétrique. Montrer que la famille (U, V) est liée.

c) En déduire que si M est élément de $\mathcal{T}$, alors il existe un vecteur $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ tel que $M = X.{}^tX$.

On définit l'application ψ sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$\psi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Soit p un réel appartenant à $]0, \frac{1}{2}[$ et $q = 1 - p$. Soit $A = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$.

Dans ce qui suit, on cherche à déterminer $\inf\limits_{M \in \mathcal{T}} \psi(A - M)$.

4–a) Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Exprimer $F(x, y) = \psi(A - U.{}^tU)$ en fonction de x et y.

b) Déterminer les points critiques de F.

c) En déduire les extremums de F.

d) En déduire le minimum de $\psi(A - U.{}^tU)$, lorsque U décrit $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

5) Répondre à la question posée.

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO XXXIV

1)

La matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{T}$. En effet, elle est symétrique. Un calcul facile montre que ses valeurs propres sont 0 et 2. Le rang de J vaut 1 car les colonnes sont non nulles et égales.

2)

Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$; $T = U({}^tU) = \begin{pmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix}$

Cette matrice est symétrique.

Les deux colonnes sont proportionnelles à $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, donc $\boxed{\text{rang } (U) \leq 1}$

Cherchons les valeurs propres de T. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

λ est valeur propre de T si et seulement si rang $(U({}^tU) - \lambda I_2) \leq 1$.

$$U({}^tU) - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} x^2 - \lambda & xy \\ xy & y^2 - \lambda \end{pmatrix} \; L_2 \longleftrightarrow L_1$$
$$\sim \begin{pmatrix} xy & y^2 - \lambda \\ x^2 - \lambda & xy \end{pmatrix}$$

$*$ Si $x = 0$, $U({}^tU) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres sont 0 et y^2 (peut-être confondues) : elles sont positives ou nulles.

$*$ Si $y = 0$, $U({}^tU) = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres sont 0 et x^2 : elles sont positives ou nulles.

$*$ Si $xy \neq 0$, effectuons $L_2 \longleftarrow xyL_2 - (x^2 - \lambda)L_1$.

$U({}^tU) - \lambda I_2 \sim \begin{pmatrix} xy & y^2 - \lambda \\ 0 & P(\lambda) \end{pmatrix}$ avec

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (xy)^2 - (x^2 - \lambda)(y^2 - \lambda) \\ &= x^2y^2 - (x^2y^2 - \lambda(x^2 + y^2) + \lambda^2) \\ &= \lambda(-\lambda + (x^2 + y^2)) \end{aligned}$$

Les valeurs propres sont 0 et $x^2 + y^2$: elles sont positives ou nulles.

Dans tous les cas, $\boxed{\text{spect } (T) \subset \mathbb{R}_+}$

$$\boxed{\text{La matrice } U({}^tU) \text{ appartient à } \mathcal{T}}$$

3–a)

Soit $B = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et φ l'endomorphisme canoniquement associé à M.

rang $(M) = 1 \iff$ rang $(\varphi) = 1$. Il existe donc $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ tel que $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{vect}(v)$. Il en résulte que :

$\exists\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ tel que $\varphi(e_1) = \lambda v$ et $\varphi(e_2) = \mu v$.

$$M = \operatorname{Mat}_B(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda a & \mu a \\ \lambda b & \mu b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \mu \end{pmatrix}.$$