FONCTION DE PLUSIEURS VARIABLES

ENONCE DE L'EXERCICE–XXV

A

Soit deux réels α et β tels que $\alpha < \beta$. On définit une application F sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ par :

$$F(x,y) = \frac{\alpha x^2 + \beta y^2}{x^2 + y^2}$$

a) Justifier les inégalités : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\},\ \alpha \leq F(x,y) \leq \beta$

b) En déduire que F est bornée sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ et déterminer les points où F atteint ses bornes.

c) Peut-on prolonger F par continuité à $\mathbb{R}^2$ tout entier ?

B

Le but de cette question est d'effectuer un travail analogue pour

$$F(x,y) = \frac{x^2 - 2xy - 3y^2}{x^2 + 2xy + 2y^2}$$

1) Montrer que l'application φ définie sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ par :

$$\forall u = (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall u' = (x',y') \in \mathbb{R}^2,\ \varphi(u,u') = xx' + xy' + x'y + 2yy'$$

est un un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ que nous noterons $\langle u, u' \rangle$.

2) Construire une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ orthonormée pour le produit scalaire φ, contenant le vecteur $e_1 = (1,0)$. On demande de plus de choisir $e_2 = (\alpha, \beta)$, avec $\beta > 0$.

Ecrire les formules de changement de bases liant les coordonnées (x,y) de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et celles (X,Y) de u dans la base $\mathcal{B}$.

3) Déterminer les valeurs propres de la matrice $S = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ associée à un endomorphisme s de $\mathbb{R}^2$.

Calculer, dans la base canonique et dans la base $\mathcal{B}$ le réel $q(u) = \langle u, s(u) \rangle$.

4) Soit $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Utiliser une base de vecteurs propres de s pour évaluer $F(x,y) = \dfrac{x^2 - 2xy - 3y^2}{x^2 + 2xy + 2y^2}$

En déduire que F est bornée sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ et atteint ses bornes.