ESPACE EUCLIDIEN

ENONCE DE L'EXERCICE–XXXII

Soit p un entier naturel tel que $p \geq 2$. On considère l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^p$ muni de sa base canonique $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ et du produit scalaire canonique associé noté $\langle , \rangle$. On désigne par $||\,||$ la norme associée. L'ensemble $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre p. On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, associée canoniquement à l'endomorphisme f, est positive si et seulement si elle est symétrique et si $\forall x \in E$, $\langle f(x), x\rangle \geq 0$, ce qui peut aussi s'ecrire matriciellement $\langle AC, C\rangle = {}^t(AC)C$ où C est la matrice colonne canoniquement associée à x. On écrira $A \succeq 0$.

1–a) Montrer qu'une matrice symétrique est positive si et seulement si ses valeurs propres sont positives.

b) Soit $T \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Prouver que les matrices $({}^tT)T$ et $T({}^tT)$ sont positives.

2) Soit A une matrice positive de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ donnée.

a) Justifier l'existence d'une matrice $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ orthogonale telle que la matrice $D = ({}^tP)AP$ soit diagonale.

Montrer que si X est une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ positive, alors la matrice $Y = ({}^tP)XP$ est positive.

b) Prouver qu'une matrice positive X de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est solution de l'équation $X^2 = A$ si et seulement si la matrice positive $Y = ({}^tP)XP$ est solution de l'équation $Y^2 = D$.

c) Soit α un réel strictement positif et Y une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ positive ; montrer que la matrice $Y + \alpha I_p$ est inversible (I_p est la matrice unité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$).

Résoudre l'équation $Y^2 = D$ avec $Y \succeq 0$.

d) En déduire qu'il existe une unique matrice positive $X \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ qui est solution de l'équation $X^2 = A$. On définit ainsi la racine carrée de A et on la note $\sqrt{A}$.

3) Soit $A = \begin{pmatrix} 25 & 20 \\ 20 & 25 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

a) Montrer que A est positive.

b) Déterminer sa racine carrée .

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.