ESPACES EUCLIDIENS

ENONCE DE L'EXERCICE–XXXV

Dans l'exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels dont le degré ne dépasse pas n. On munit E du produit scalaire défini par :

$$\forall (P,Q) \in \ E^2,\ \langle P,Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

1) Pour tout polynôme P de E, on note $s(P)$ le polynôme tel que pour tout réel x :

$$s(P)(x) = P(1-x).$$

a) Montrer que s définit un endomorphisme de E.

b) Expliciter, pour $P \in E$, le degré de $s(P)$ en fonction de celui de P.

c) Qu'en déduit-on pour la matrice de s dans la base canonique de E ?

d) Montrer que s est diagonalisable.

2) Soit d l'application de E dans $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$\forall P \in E,\ d(P) = X(1-X)P'' - (2X-1)P'$$

a) Vérifier que d est un endomorphisme de E et que

$$\forall (P,Q) \in \ E^2,\ \langle d(P),Q\rangle = -\int_0^1 x(1-x)Q'(x)P'(x)dx$$

b) L'endomorphisme d admet-il 0 pour valeur propre ? Si oui, préciser l'espace propre associé.

c) Montrer que les valeurs propres non nulles de d sont strictement négatives.

d) Montrer que d est diagonalisable.

3–a) Montrer que les sous-espaces propres de s sont stables par d.

b) Montrer qu'il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres communs à s et d.