BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CODE SUJET :
289
HEC_M3_E

Concepteur : H.E.C.

OPTION : ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Mercredi 2 Mai 2007, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE

1. On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) ; soit t l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice associée T relativement à cette base s'écrit :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer les valeurs propres de t. Déterminer les sous-espaces propres de t associés, et donner une base de chacun d'entre eux.
L'endomorphisme t est-il diagonalisable ? Est-il bijectif ?

L'objet des questions suivantes est une généralisation des résultats précédents.

2. Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{2n+1}$ muni de sa base canonique $(e_1, e_2, \ldots, e_{2n+1})$. Soit t l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n+1}$ défini par :

- pour tout entier i de $[\![1, 2n+1]\!]$, avec $i \neq n+1$: $t(e_i) = e_1$;
- $t(e_{n+1}) = e_1 + e_2 + \cdots + e_{2n+1}$.

a) Déterminer la matrice T associée à l'endomorphisme t relativement à la base $(e_1, e_2, \ldots, e_{2n+1})$.

b) Déterminer le rang de t, ainsi que la dimension du noyau de t.

c) Justifier que 0 est valeur propre de t. Déterminer la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0, ainsi qu'une base de ce sous-espace.

3. Montrer que $\mathrm{Im}(t \circ t) \subset \mathrm{Im}(t)$, où $\mathrm{Im}(u)$ désigne l'image d'un endomorphisme u de $\mathbb{R}^{2n+1}$.

4. Soit $\tilde{t}$ l'endomorphisme défini sur $\mathrm{Im}(t)$ par : pour tout x de $\mathrm{Im}(t)$, $\tilde{t}(x) = t(x)$.

Établir que $\mathcal{B} = \left(e_1, \sum_{i=1}^{2n+1} e_i\right)$ constitue une base de $\mathrm{Im}(t)$. Écrire la matrice associée à $\widetilde{t}$ relativement à la base $\mathcal{B}$.

5. a) Soit λ une valeur propre non nulle de t, et x un vecteur propre associé à λ. Montrer que x appartient à $\mathrm{Im}(t)$.

b) En déduire toutes les valeurs propres de t. L'endomorphisme t est-il diagonalisable ?

PROBLÈME

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont considérées comme définies sur des espaces probabilisés non nécessairement identiques, mais qui, par souci de simplification, seront tous notés $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Partie I

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{1}{2} \times e^{-|x|}$.

a) Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} g(x)dx$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} g(x)dx$ sont convergentes et de même valeur.

b) Établir que g est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Soit Y une variable aléatoire à valeurs réelles admettant g pour densité. *On dit que Y suit la loi $\mathcal{L}(0)$.*

2. Étudier les variations de g et tracer l'allure de sa représentation graphique dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

3. a) Montrer, pour tout r de $\mathbb{N}$, l'existence du moment $m_r(Y)$ d'ordre r de la variable aléatoire Y.

b) Calculer, pour tout r de $\mathbb{N}$, $m_r(Y)$ en fonction de r. Quelles sont les valeurs de l'espérance $E(Y)$ et de la variance $V(Y)$ de la variable aléatoire Y ?

4. a) Déterminer la fonction de répartition G de Y.

b) Établir que G est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.

c) Montrer que l'équation $G(x) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution que l'on déterminera.

d) Établir que la fonction qui, à tout réel x associe $G(x)(1 - G(x))$, est paire.

5. a) Montrer que l'application réciproque G^{-1} de G est définie par :

$$G^{-1}(x) = \begin{cases} \ln(2x) & \text{si } 0 < x \leqslant 1/2 \\ -\ln(2(1-x)) & \text{si } 1/2 \leqslant x < 1 \end{cases}$$

b) Écrire une fonction Pascal dont l'en-tête est `Laplace` qui permet de simuler la loi $\mathcal{L}(0)$. On rappelle que la fonction `random` permet de simuler en Pascal une loi uniforme sur $]0,1[$.

6. Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on considère la fonction g_n définie par :

$$g_n(x) = g(x)(1 + xe^{-n|x|})$$

Montrer que g_n définit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on désigne par Y_n une variable aléatoire de densité g_n, et on note G_n la fonction de répartition de Y_n.

7. a) Établir pour tout réel x, la majoration suivante : $|G_n(x) - G(x)| \leqslant \dfrac{1}{ne} \times G(x)$.

b) En déduire que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers la loi $\mathcal{L}(0)$.

Partie II

Soit θ un paramètre réel inconnu et X une variable aléatoire à densité. *On dit que X suit la loi $\mathcal{L}(\theta)$*, si une densité f de X est donnée par : pour tout x réel, $f(x) = \dfrac{e^{-|x-\theta|}}{2}$.

Soit n un entier naturel . On considère un $(2n+1)$–échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_{2n+1})$ de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi $\mathcal{L}(\theta)$.

1. a) Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.

b) En déduire que la variable aléatoire $(X - \theta)$ suit la loi $\mathcal{L}(0)$ définie dans la partie I.

c) Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

d) Résoudre l'équation $F(x) = 1/2$.

2. Soit x un réel fixé. Pour tout i de $[\![1, 2n+1]\!]$, on note Z_i la variable aléatoire de Bernoulli telle que $P([Z_i = 1]) = P([X_i \leqslant x])$.

a) Établir l'indépendance des variables aléatoires $Z_1, Z_2, \dots, Z_{2n+1}$.

b) Soit S_{2n+1} la variable aléatoire définie par : $S_{2n+1} = \sum_{i=1}^{2n+1} Z_i$. Quelle est la loi de probabilité de S_{2n+1} ? Préciser l'espérance et la variance de S_{2n+1}.

3. On pose $\overline{X}_{2n+1} = \dfrac{1}{2n+1} \sum_{i=1}^{2n+1} X_i$.

a) Montrer que $\overline{X}_{2n+1}$ est un estimateur sans biais du paramètre θ.

b) Calculer le risque quadratique de $\overline{X}_{2n+1}$ en θ.

Partie III

Le contexte de cette partie est identique à celui de la partie précédente.

Pour tout ω de Ω, on réordonne par ordre croissant les réels $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_{2n+1}(\omega)$, et on note $\widehat{X_1}(\omega), \widehat{X_2}(\omega), \dots, \widehat{X}_{2n+1}(\omega)$, les nombres ainsi rangés, c'est-à-dire que $\widehat{X_1}(\omega) \leqslant \widehat{X_2}(\omega) \leqslant \dots \leqslant \widehat{X}_{2n+1}(\omega)$. On définit ainsi $(2n+1)$ variables aléatoires $\widehat{X_1}, \widehat{X_2}, \dots, \widehat{X}_{2n+1}$ telles que $\widehat{X_1} \leqslant \widehat{X_2} \leqslant \dots \leqslant \widehat{X}_{2n+1}$, qui constituent un réarrangement par ordre croissant des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_{2n+1}$. On admet que $P([\widehat{X_1} < \widehat{X_2} < \dots < \widehat{X}_{2n+1}]) = 1$.

On s'intéresse dans cette partie à la variable aléatoire $\widehat{X}_{n+1}$.

1. a) Pour tout réel x, justifier l'égalité entre événements suivante : $[\widehat{X}_{n+1} \leqslant x] = [S_{2n+1} \geqslant n+1]$.

b) En déduire la fonction de répartition $\widehat{F}_{n+1}$ de $\widehat{X}_{n+1}$ en fonction de F (on exprimera cette fonction sous forme d'une somme que l'on ne cherchera pas à calculer).

2. On note $\widehat{f}_{n+1}$ une densité de $\widehat{X}_{n+1}$, et $\widehat{g}_{n+1}$ une densité de $(\widehat{X}_{n+1} - \theta)$.

a) Établir pour tout j de $[\![0, 2n]\!]$, l'égalité suivante : $(j+1)\dbinom{2n+1}{j+1} = (2n-j+1)\dbinom{2n+1}{j}$.

b) En déduire, pour tout x réel, l'égalité :

$$\widehat{f}_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}(F(x))^n(1-F(x))^n f(x)$$

c) Établir, pour tout x réel, l'égalité suivante :

$$\widehat{g}_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}(G(x))^n(1-G(x))^n g(x)$$

où g et G ont été définies dans la partie I.

d) En utilisant la question I.4.d, montrer que $\widehat{X}_{n+1}$ est un estimateur sans biais du paramètre θ.

3. *Dans cette question, on étudie le comportement de la suite* $(\widehat{X}_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, *lorsque* n *tend vers* $+\infty$.

On désigne par $\widehat{h}_{n+1}$ une densité de la variable aléatoire $\sqrt{2n+1}(\widehat{X}_{n+1}-\theta)$.

a) Montrer que pour tout réel x, on a :

$$\widehat{h}_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \times \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\left(G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)^n \times \left(1-G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)^n \times g\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)$$

b) Écrire, lorsque u tend vers 0, le développement limité à l'ordre 2 de e^{-u}, et le développement limité à l'ordre 1 de $\ln(1-u)$.

c) Soit x un réel fixé. Montrer que lorsque n tend vers $+\infty$, on a :

$$G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\left(1-G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(1-\frac{x^2}{2n+1}+o\left(\frac{1}{(2n+1)}\right)\right)$$

d) En déduire que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 4^n\left[G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\left(1-G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)\right]^n = e^{-x^2/2}$.

e) On admet que lorsque n tend vers $+\infty$, on a :

$$\binom{2n}{n} \times \frac{1}{4^n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

Montrer alors que pour tout réel x, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \widehat{h}_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

4. On admet que le résultat de la question précédente entraîne la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(\sqrt{2n+1}(\widehat{X}_{n+1}-\theta))_n$ vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

Montrer qu'un intervalle de confiance $[I_n, J_n]$ pour le paramètre θ au risque $\alpha = 0.05$, est donné par :

$$I_n = \widehat{X}_{n+1} - \frac{1.96}{\sqrt{2n+1}} \quad \text{et} \quad J_n = \widehat{X}_{n+1} + \frac{1.96}{\sqrt{2n+1}}$$

(on rappelle que si Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, on a $\Phi(1.96) \approx 0.975$).

ANNALES DE MATHEMATIQUES

HEC, ESCP, LYON 2007 VOIE ECO

CORRIGE

EXERCICE

1)

• Le réel λ est valeur propre de T (et de t) si et seulement si l'équation $(T-\lambda I_3)X=(0)$ d'inconnue $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ admet une autre solution que la solution $X=(0)$.

$$(T-\lambda I_3)X=(0) \iff \begin{cases}(1-\lambda)x+y+z &=0\\ (1-\lambda)y &=0\\ y-\lambda z &=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}(1-\lambda)x+z+y &=0\\ -\lambda z+y &=0\\ (1-\lambda)y &=0\end{cases} \qquad \textbf{(S)}$$

Ce système est triangularisé : il admet une autre solution que la solution nulle si et seulement si l'un des termes diagonaux est nul.

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } T \text{ sont } 0 \text{ et } 1}$$

• Détermination des sous-espaces propres $E(\lambda,t)$

$*$ Pour $\lambda=0$, on doit résoudre le système **(S)** ; on obtient

$$u=(x,y,z)\in E(0,t) \iff \begin{cases}x+y+z &=0\\ y &=0\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}z &=-x\\ y &=0\end{cases}$$

$$\begin{aligned}E(0,t) &= \{u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ / \ z=-x, y=0\}\\ &= \{u=(x,0,-x)\in\mathbb{R}^3 \ / \ x\in\mathbb{R}\}\end{aligned}$$

$$\boxed{E(0,t)=\text{vect}((1,0,-1)) : \dim E(0,t)=1 \text{ puisque } (1,0,-1)\neq(0,0,0)}$$

$*$ Pour $\lambda=1$.

$$u=(x,y,z)\in E(1,t) \iff \begin{cases}z+y &=0\\ -z+y &=0\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}y &=0\\ z &=0\end{cases}$$

$$\begin{aligned}E(1,t) &= \{u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ / \ z=y=0\}\\ &= \{u=(x,0,0)\in\mathbb{R}^3 \ / \ x\in\mathbb{R}\}\end{aligned}$$

$$\boxed{E(1,t)=\text{vect}((1,0,0)) : \dim E(1,t)=1 \text{ puisque } (1,0,0)\neq(0,0,0)}$$

$$\boxed{\dim E(0,t)+\dim E(1,t)=2\neq\dim\mathbb{R}^3 : \text{l'endomorphisme } t \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

- $\operatorname{Ker} t = \operatorname{Ker}(t - 0\,\mathrm{Id}_E) = E(0,t) \neq \{0_E\}$: $\boxed{t \text{ n'est pas injectif, donc il n'est pas bijectif}}$

Remarque : On aurait pu dire aussi : 0 est valeur propre de t, donc t n'est pas bijectif.

2.a)

Nous noterons $E = \mathbb{R}^{2n+1}$.

Ecrivons la matrice T de t dans la base canonique $B = (e_1, \ldots, e_{2n+1})$ de E.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour tout $i \in [\![1, 2n+1]\!]$, on a écrit en colonnes les coordonnées de $t(e_i)$ dans la base canonique de E :

si $i \neq n+1$, alors $t(e_i) = (1, 0, \ldots, 0)$ et $t(e_{n+1}) = (1, 1 \ldots, 1)$.

2.b)

On sait d'après le cours que

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} t &= \operatorname{vect}(t(e_1), t(e_2), \ldots, t(e_{n+1}), \ldots, t(e_{2n}), t(e_{2n+1})) \\ &= \operatorname{vect}(e_1, e_1, \ldots, \sum_{k=1}^{2n+1} e_k, e_1, \ldots, e_1) \\ &= \operatorname{vect}(e_1, \sum_{k=1}^{2n+1} e_k) \end{aligned}$$

Ces deux vecteurs ne sont évidemment pas proportionnels, donc

$$\boxed{\operatorname{Im} t = \operatorname{vect}(e_1, \sum_{k=1}^{2n+1} e_k) \text{ et } \dim \operatorname{Im} t = 2}$$

D'après le théorème du rang, $\boxed{\dim \operatorname{Ker} t = 2n + 1 - \dim \operatorname{Im} t = 2n - 1}$

2.c)

Nous savons que $2n - 1 \geq 1$ puisque $n \geq 1$, donc $\operatorname{Ker} t \neq \{0_E\}$: c'est donc le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 0$.

Pour donner une base de $E(0,t) = \operatorname{Ker} t$, il suffit de trouver $2n - 1$ vecteurs de $\operatorname{Ker} t$ linéairement indépendants.

D'après l'énoncé, $\forall k \in [\![2, 2n+1]\!],\ k \neq n+1$, on a $t(e_k) = t(e_1)$, ce qui veut dire $t(e_1) - t(e_k) = 0_E$, soit $t(e_1 - e_k) = 0_E$

Cela signifie que le vecteur $u_k = e_1 - e_k$ pour $k \in [\![2, 2n+1]\!],\ k \neq n+1$, est un vecteur de $\operatorname{Ker} t$. Puisque k peut prendre $2n - 1$ valeurs (les $2n$ valeurs de $[\![2, 2n+1]\!]$ exceptée la valeur $n+1$), on a ainsi obtenu $2n - 1$ vecteurs de $\operatorname{Ker} t$.

Vérifions que ces vecteurs forment une famille libre de E.

Soit $(a_2, \ldots, a_n, a_{n+2}, \ldots, a_{2n+1}) \in \mathbb{R}^{2n-1}$ tel que $\sum\limits_{\substack{k=2 \\ k\neq n+1}}^{2n+1} a_k u_k = 0_E$. Cette égalité équivaut successsivement à :

$$\sum_{\substack{k=2 \\ k\neq n+1}}^{2n+1} a_k(e_1 - e_k) = 0_E$$

$$\Big(\sum_{\substack{k=2 \\ k\neq n+1}}^{2n+1} a_k\Big)e_1 - \sum_{\substack{k=2 \\ k\neq n+1}}^{2n+1} a_k e_k, \text{ soit finalement à}$$

$\sum_{\substack{k=2\\k\neq n+1}}^{2n+1} a_k = 0$ et $\forall k\ /\ k \in [\![2, 2n+1]\!] - \{n+1\},\ a_k = 0$ puisque la famille $(e_1, \dots e_n, e_{n+2}, \dots, e_{2n+1})$ est une famille libre en tant que sous-famille de la base canonique.

On obtient immédiatement que $\forall k \in [\![2, 2n+1]\!] - \{n+1\},\ a_k = 0$.

> La famille u_k pour $2 \leq k \leq 2n+1,\ k \neq n+1$ est une famille libre de $2n-1$ vecteurs dans un espace de dimension $2n-1$: c'en est donc une base.
>
> $E(0,t)$ a donc pour dimension $2n-1$ et pour base la famille u_k où $u_k = e_1 - e_k$ pour $2 \leq k \leq 2n+1,\ k \neq n+1$
>
> $$E(0,t) = \mathrm{vect}(u_2, u_3, \dots, u_n, u_{n+2}, \dots, u_{2n+1}) \text{ avec } u_k = e_1 - e_k$$

3)

$\forall v \in \mathrm{Im}(t \circ t),\ \exists\, u \in E\ /\ v = (t \circ t)(u)$; or $(t \circ t)(u) = t(t(u))$ et puisque $t(u)$ est un vecteur de E, si on le note w, on aura $v = t(w)$. Ceci prouve que $v \in \mathrm{Im}\, t$.

$$\boxed{\forall v \in \mathrm{Im}(t \circ t),\ v \in \mathrm{Im}\, t \text{ veut dire } \mathrm{Im}(t \circ t) \subset \mathrm{Im}\, t}$$

4)

- $\mathcal{B} = (e_1, \sum_{k=1}^{2n+1} e_k)$ est une base de $\mathrm{Im}\, t$ résulte de la question **2.b)**. Pour écrire la matrice de $\widetilde{t}$,

nous devons exprimer $\widetilde{t}(e_1)$ et $\widetilde{t}(\sum_{k=1}^{2n+1} e_k)$ dans la base $\mathcal{B}$.

$$\begin{aligned}
\widetilde{t}(e_1) &= t(e_1) = e_1 \\
\widetilde{t}(\sum_{k=1}^{2n+1} e_k) &= t(\sum_{k=1}^{2n+1} e_k) \\
&= \sum_{k=1}^{2n+1} t(e_k) \\
&= \sum_{\substack{k=1\\k\neq n+1}}^{2n+1} t(e_k) + t(e_{n+1}) \\
&= \sum_{\substack{k=1\\k\neq n+1}}^{2n+1} e_1 + \sum_{k=1}^{2n+1} e_k \\
&= 2ne_1 + \sum_{k=1}^{2n+1} e_k
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Il en résulte que } C = \mathrm{Mat}\,(\widetilde{t}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

5.a)

Si λ est une valeur propre non nulle de t et x un vecteur propre associé, on a $t(x) = \lambda x$. Puisque $\lambda \neq 0$, on peut diviser les deux membres par λ ; il vient
$x = \frac{1}{\lambda} t(x) = t(\frac{1}{\lambda} x)$ par linéarité. Si on pose $y = \frac{1}{\lambda} x$, on constate bien sûr que $y \in E$ et on a $x = t(y)$. Cela prouve que $\boxed{x \in \mathrm{Im}\, t}$

5.b)

Recherchons les valeurs **non nulles** de t. Les vecteurs propres associés sont dans $\mathrm{Im}\, t$.

$\lambda \neq 0$ est valeur propre de t si et seulement s'il existe un vecteur non nul x appartenant à $\mathrm{Im}\, t$ tel que $t(x) = \lambda x$, donc si et seulement si il existe un vecteur non nul x appartenant à $\mathrm{Im}\, t$ tel que $\widetilde{t}(x) = \lambda x$.

Cela revient à chercher les valeurs propres non nulles de $\widetilde{t}$.

D'après la matrice C de $\widetilde{t}$ dans la base $\mathcal{B}$, $\widetilde{t}$ n'admet qu'une seule valeur propre , c'est $\lambda = 1 \neq 0$.

Soit u un vecteur dont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont (a, b)

$$\begin{aligned} \widetilde{t}(u) = u \quad &\iff 2nb \quad = 0 \\ &\iff b \quad = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} E(1, \widetilde{t}) = E(1, t) = \text{vect}(e_1) : \dim E(1, t) = 1 \\ \dim E(0, t) + \dim E(1, t) = 2n - 1 + 1 = 2n \neq \dim E : \\ t \text{ n'est pas diagonalisable} \end{array}}$$

PROBLEME

PARTIE I

I−1.a)

Remarquons que $x \mapsto -|x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ puisque $x \mapsto |x|$ l'est, puis remarquons que exp est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, donc par composition, la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$; remarquons également que g est une fonction paire. **Il en résulte que $\int_{-\infty}^{0} g(x)dx$ converge si et seulement si $\int_{0}^{+\infty} g(x)dx$ converge. Dans ces conditions ces deux intégrales ont la même valeur.**

• • • Pour les étudiants qui ne connaissent pas ce résultat : soit h une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Supposons h paire.

Soit $a < 0$; $I(a) = \int_{a}^{0} h(x)dx$. Effectuons le changement de variable affine $t = -x$; $dt = -dx$ et dans ces conditions,

$$\begin{aligned} I(a) &= -\int_{-a}^{0} h(-t)dt = -\int_{-a}^{0} h(t)dt \qquad \text{car la fonction } h \text{ est paire} \\ &= \int_{0}^{-a} h(t)dt \end{aligned}$$

L'intégrale $\int_{-\infty}^{0} h(t)dt$ converge si et seulement si $\lim\limits_{a \to -\infty} I(a)$ existe et est réelle, donc si et seulement si $\lim\limits_{a \to -\infty} \int_{0}^{-a} h(t)dt$ existe et est réelle, donc (puisque $-a \to +\infty$) si et seulement si **l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} h(t)dt$ converge.**

Dans notre cas $\int_{0}^{+\infty} g(x)dx = \frac{1}{2} \int_{0}^{+\infty} \exp(-x)dx = \frac{1}{2}$, car on aura reconnu l' intégrale d'une densité de la loi exponentielle de paramètre 1

$$\boxed{\int_{-\infty}^{0} g(x)dx = \int_{0}^{+\infty} g(x)dx = \frac{1}{2}}$$

Remarque : La même démonstration montrerait que si h est une fonction impaire, alors l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} h(t)dt$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} h(t)dt$ converge et que dans ces conditions ces deux intégrales sont opposées.

