BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CODE SUJET : 298 EDHECMATE

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option économique

Lundi 7 mai 2007 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note ${}^tM$ la matrice transposée de M, définie de la façon suivante : si $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ alors ${}^tM = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

On pose $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On rappelle que $\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On note φ l'application qui à toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associe $\varphi(M) = M + {}^tM$.

1) a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Écrire la matrice A de φ dans la base $\mathcal{B}$.

c) En déduire que φ est diagonalisable et non bijectif.

2) Calculer A^2 et en déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $A^n = 2^{n-1}A$.

3) a) Montrer que $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{vect}(E_1, E_2 + E_3, E_4)$, puis établir que $\dim \operatorname{Im}\varphi = 3$.

b) En déduire la dimension de $\operatorname{Ker}\varphi$ puis déterminer une base de $\operatorname{Ker}\varphi$.

c) Établir que $\operatorname{Im}\varphi$ est un sous-espace propre de φ et préciser la valeur propre associée.

d) Donner, pour résumer, les deux valeurs propres de φ ainsi qu'une base de chacun des sous-espaces propres associés.

Exercice 2

On admet que, si Z_1 et Z_2 sont deux variables aléatoires à densité, définies sur le même espace probabilisé, alors leur covariance, si elle existe, est définie par :
$\text{cov}(Z_1, Z_2) = E(Z_1 Z_2) - E(Z_1)E(Z_2)$.
On admet également que si Z_1 et Z_2 sont indépendantes alors leur covariance est nulle.
On considère deux variables aléatoires réelles X et U définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, X suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et U suivant la loi discrète uniforme sur $\{-1, 1\}$.
On pose $Y = UX$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1) a) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que :
$\forall x \in \mathbb{R},\ P(Y \leq x) = P([U=1] \cap [X \leq x]) + P([U=-1] \cap [X \geq -x])$.
  b) En déduire que Y suit la même loi que X.

2) a) Calculer l'espérance de U puis montrer que $E(XY) = 0$.
  b) En déduire que $\text{cov}(X, Y) = 0$.

3) a) Rappeler la valeur de $E(X^2)$ et en déduire que $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$.
  b) Montrer, grâce à une intégration par parties, que :
$\forall A \in \mathbb{R}_+,\ \int_0^A x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = -A^3 e^{-\frac{A^2}{2}} + 3\int_0^A x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$.
  c) En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$ converge et vaut $\frac{3}{2}\sqrt{2\pi}$.
  d) Établir finalement que X a un moment d'ordre 4 et que $E(X^4) = 3$.

4) a) Vérifier que $E(X^2 Y^2) = 3$.
  b) Déterminer $\text{cov}(X^2, Y^2)$.
  c) En déduire que X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes. Montrer alors que X et Y ne le sont pas non plus.
  d) Cet exercice a permis de montrer qu'un résultat classique concernant les variables discrètes est encore valable pour les variables à densité. Lequel ?

Exercice 3

1) a) Montrer que : $\forall x > 0,\ x - \ln x > 0$.
  b) On pose alors : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln x}{x - \ln x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$.

Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction f.

2) a) Montrer que f est continue sur D.
  b) Montrer que f est dérivable (à droite) en 0 et que $f'_d(0) = 0$.

3) a) Justifier que f est dérivable sur $D \setminus \{0\}$ et calculer $f'(x)$ pour tout x de $D \setminus \{0\}$.
  b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
  c) Dresser le tableau de variation de f.

4) Étudier le signe de $f(x)$.

5) Pour tout réel x élément de D, on pose $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

a) Montrer que F est de classe C^1 sur D puis étudier ses variations.

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\ln t}{t}\,dt$.

c) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\ln t}{t-\ln t}\,dt$, puis $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

Problème

Partie 1

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.

1) a) Déterminer les valeurs propres de M, que l'on notera λ_1, λ_2 et λ_3 avec $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$.

b) En déduire que M est diagonalisable.

2) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer le produit MP.

Que peut-on en déduire en ce qui concerne les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$?

b) Justifier que la matrice P est inversible.

Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = P D^n P^{-1}$, où D est la matrice $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.

c) Déterminer P^{-1} et en déduire explicitement M^n pour tout n *de* $\mathbb{N}$.

Partie 2

Une urne contient une boule rouge et deux boules blanches. On y effectue au hasard des tirages d'une boule selon la procédure suivante :

- si la boule tirée est rouge, elle est remise dans l'urne.
- si la boule tirée est blanche, elle n'est pas remise dans l'urne.

Pour tout i de $\mathbb{N}^*$, on note B_i (respectivement R_i) l'événement « on obtient une boule blanche (respectivement rouge) au $i^{\text{ème}}$ tirage ».

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches qui restent dans l'urne après le $n^{\text{ème}}$ tirage et l'on pose $X_0 = 2$.

On pose $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}$ et on a donc $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

1) Montrer, grâce à la formule des probabilités totales, que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = M U_n$.

2) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = M^n U_0$, puis déterminer la loi de X_n.

3) On note T_1 la variable aléatoire égale au numéro du tirage où l'on extrait la première boule blanche et T_2 la variable aléatoire égale au numéro du tirage où l'on extrait la deuxième boule blanche. On admet que T_1 et T_2 sont des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que les variables aléatoires X_n ($n \in \mathbb{N}$)

a) Reconnaître la loi de T_1.

b) Écrire les événements $(T_2 = 2)$ et $(T_2 = 3)$ à l'aide de certains des événements B_i puis calculer les probabilités $P(T_2 = 2)$ et $P(T_2 = 3)$.

c) Déterminer la loi du couple (T_1, T_2) et en déduire que la loi de T_2 est donnée par :

$\forall j \geq 2,\ P(T_2 = j) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{j-1}$.

d) Montrer que T_2 possède une espérance et calculer cette dernière.

4) a) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, écrire l'événement $(T_2 = n)$ en fonction des événements $(X_{n-1} = 1)$ et $(X_n = 0)$.

b) Retrouver ainsi la loi de T_2.

5) a) On rappelle que la fonction *random*(n) renvoie aléatoirement un nombre entier élément de $\{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche le plus petit entier naturel n pour lequel $X_n = 0$.

```
Program edhec2007 ;
Var   X, n, hasard : integer ;
Begin
   Randomize ;
   X : = 2 ; n : = 0 ;
      Repeat
      n : = n+1 ;
      hasard : = random(3) ;
      if  (--------) then  X : = -------- ;
      until (X = 1) ;
      Repeat
      n : = n+1 ;
      hasard : = -------- ;
      if  (--------) then  X : = -------- ;
      until (X = 0) ;
   Writeln (n) ;
End.
```

b) Comment modifier ce programme pour qu'il calcule et affiche les valeurs prises par T_1 et T_2 lors de l'expérience aléatoire étudiée ?

ANNALES DE MATHEMATIQUES

EDHEC 2007 VOIE ECONOMIQUE

CORRIGE

EXERCICE I

1–a)

Il est clair que $\varphi(M)$ appartient à $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On remarque que $M \mapsto {}^tM$ est linéaire : en effet

$$\begin{aligned} {}^t\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) &= {}^t\begin{pmatrix} a+\lambda a' & b+\lambda b' \\ c+\lambda c' & d+\lambda d' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+\lambda a' & c+\lambda c' \\ b+\lambda b' & d+\lambda d' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} \\ &= {}^t\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \lambda {}^t\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Notons T cette application ; c'est donc un endomorphisme de E. Avec cette notation, $\varphi = \mathrm{Id}_E + T$.
C'est la somme de deux endomorphismes de E : $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$

1–b)

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: $M = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4$ et $T(M) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = aE_1 + bE_3 + cE_2 + dE_4$; on conclut que $T(E_1) = E_1,\ T(E_2) = E_3,\ T(E_3) = E_2$ et $T(E_4) = E_4$. Finalement
$\varphi(E_1) = 2E_1,\ \varphi(E_2) = E_2 + E_3,\ \varphi(E_3) = E_2 + E_3$ et $\varphi(E_4) = 2E_4$.

$$\boxed{\text{Dans la base } (E_1, E_2, E_3, E_4) \text{ de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \text{ la matrice de } \varphi \text{ est } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

1–c)

La matrice A est symétrique (réelle), donc diagonalisable.

Elle possède deux lignes égales, donc elle n'est pas inversible et φ n'est pas bijective.

Remarque : On aurait pu dire aussi que $\varphi(E_2) = \varphi(E_3)$, donc $E_2 - E_3$ appartient au noyau de φ, ce qui implique que φ n'est pas injective.

2)

Le calcul donne sans problème $\boxed{A^2 = 2A \quad \textbf{(a)}}$

Montrons par récurrence que $\forall n \geq 1,\ A^n = 2^{n-1}A$.

Initialisation : elle vient d'être faite et on peut remarquer que $A^1 = 2^0 A$.

Hérédité : supposons que, pour un entier $n \geq 1$, on ait $A^n = 2^{n-1}A$.

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A = 2^{n-1}A \times A \quad \text{d'après l' hypothèse de récurrence} \\ &= 2^{n-1}A^2 = 2^{n-1} \times 2A \quad \text{d'après (a)} \\ &= 2^n A. \end{aligned}$$

La propriété est héréditaire et par principe de récurrence, $\boxed{\forall n \geq 1,\ A^n = 2^{n-1}A}$

3–a)

On sait d'après le cours que

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\varphi &= \operatorname{vect}(\varphi(E_1), \dots, \varphi(E_4)) \\ &= \operatorname{vect}(\varphi(E_1), \varphi(E_2), \varphi(E_4)) \quad \text{car } \varphi(E_2) = \varphi(E_3) \\ &= \operatorname{vect}(2E_1, E_2 + E_3, 2E_4) \\ &= \operatorname{vect}(E_1, E_2 + E_3, E_4) \end{aligned}$$

La famille $(E_1, E_2 + E_3, E_4)$ est génératrice de $\operatorname{Im}\varphi$. Montrons qu'elle est libre.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ / $\alpha E_1 + \beta(E_2 + E_3) + \gamma E_4 = (0)$

Cette égalité est en fait $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On obtient immédiatement $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

$$\boxed{(E_1, E_2 + E_3, E_4) \text{ est une base de } \operatorname{Im}\varphi : \dim \operatorname{Im}\varphi = 3}$$

3–b)

D'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker}\varphi = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) - \dim \operatorname{Im}\varphi = 4 - 3 = 1$. Or on a vu, dans la question précédente que $E_2 - E_3$ appartenait à $\operatorname{Ker}\varphi$ (puisque $\varphi(E_2) = \varphi(E_3)$). Ce vecteur, qui n'est pas nul, constitue donc une famille libre dans un espace de dimension 1 : c'en est une base.

$$\boxed{\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{vect}(E_2 - E_3) \text{ et } \dim \operatorname{Ker}\varphi = 1}$$

3–c)

$\forall M \in \operatorname{Im}\varphi, \exists\, N \in E$ / $M = \varphi(N)$; donc $\varphi(M) = \varphi^2(N) = 2\varphi(N) = 2M$ d'après la question 2).

On vient de montrer que $\forall M \in \operatorname{Im}\varphi,\ M \in E(2, \varphi)$ (sous-espace propre de φ associé à la valeur propre 2). Donc $\operatorname{Im}\varphi \subset E(2, \varphi)$

Réciproquement : si $M \in E(2, \varphi)$, alors $\varphi(M) = 2M$, ou encore $M = \frac{1}{2}\varphi(M) = \varphi(\frac{1}{2}M)$ par linéarité de φ. Et puisque $\frac{1}{2}M \in E$, on en conclut que $M \in \operatorname{Im}\varphi$. On a donc $E(2, \varphi) \subset \operatorname{Im}\varphi$.

$$\boxed{\text{Conclusion : } E(2, \varphi) = \operatorname{Im}\varphi : \dim E(2, \varphi) = 3}$$

3–d)

$\dim \operatorname{Ker}\varphi = 1$, donc $\operatorname{Ker}\varphi = E(0, \varphi)$ (sous-espace propre de φ associé à la valeur propre 0).

On a alors $\dim E(2, \varphi) + \dim E(0, \varphi) = 4 = \dim E$.

Remarquons que $A^2 - 2A = (0)$ d'après la question 2), le polynôme $P = X^2 - 2X$ est donc annulateur de A : les valeurs propres éventuelles de A sont racines de P, ce qui veut dire que $\operatorname{spect} A \subset \{0, 2\}$.

> La matrice A, donc l'endomorphisme φ, ne possède pas d'autres valeurs propres que 0 et 2. L'égalité $\dim E(2, \varphi) + \dim E(0, \varphi) = 4 = \dim E$ prouve alors que A est diagonalisable, ce que l'on savait.
>
> $E(2, \varphi)$ a pour base $(E_1, E_2 + E_3, E_4)$ et $E(0, \varphi)$ a pour base $(E_2 - E_3)$

Remarque : Pour déterminer les valeurs propres de φ on aurait pu raisonner de la manière suivante (mais cela aurait été moins élégant) :

L'égalité $\dim E(2, \varphi) + \dim E(0, \varphi) = 4 = \dim E$ prouve que φ ne possède pas d'autres valeurs propres.