BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 296

Conception : EMLYON Business School

1ère épreuve (option économique)

MATHÉMATIQUES

Mardi 29 avril 2014 de 8 heures à 12 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

EXERCICE 1

On considère l'application $\varphi :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \mathrm{e}^x - x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$. On admet : $2 < \mathrm{e} < 3$.

Partie I : Étude de la fonction φ

1. Montrer que φ est de classe C^3 sur $]0\,;+\infty[$, calculer, pour tout x de $]0\,;+\infty[$, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$, et montrer : $\quad \forall x \in]0\,;+\infty[,\quad \varphi'''(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{3x+1}{x^5}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

2. Étudier le sens de variation de φ'' et calculer $\varphi''(1)$.
En déduire le sens de variations de φ', et montrer :
$$\forall x \in]0\,;+\infty[,\quad \varphi'(x) \geqslant \mathrm{e}.$$

3. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

4. Déterminer la limite de $\dfrac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$, et la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

5. On admet : $15 < \varphi(3) < 16$. Montrer : $\quad \forall x \in [3\,;+\infty[,\quad \varphi(x) \geqslant \mathrm{e}\,x$.

On note C la courbe représentative de φ.

6. Montrer que C admet un unique point d'inflexion, déterminer les coordonnées de celui-ci et une équation de la tangente en ce point.

7. Dresser le tableau de variations de φ, avec les limites en 0 et en $+\infty$, et la valeur en 1.

Tracer l'allure de C et faire apparaître la tangente au point d'inflexion.

On précisera la nature de la branche infinie au voisinage de 0 et la nature de la branche infinie au voisinage de $+\infty$.

Partie II : Étude d'extremum pour une fonction réelle de deux variables réelles

On note $U = \mathbb{R} \times]0\,;+\infty[$ et on considère l'application

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto xy - \mathrm{e}^x \ln y.$$

8. Représenter graphiquement l'ensemble U.

9. Montrer que f est de classe C^2 sur l'ouvert U et calculer, pour tout (x, y) de U, les dérivées partielles premières et les dérivées partielles secondes de f au point (x, y).

10. Établir que, pour tout (x, y) de U, (x, y) est un point critique de f si et seulement si :

$$x > 0 \quad \text{et} \quad y = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \quad \text{et} \quad \varphi(x) = 0.$$

11. En déduire que f admet un point critique et un seul, et qu'il s'agit de $(1, \mathrm{e})$.

12. Est-ce que f admet un extremum local en $(1, \mathrm{e})$?

13. Est-ce que f admet un extremum local sur U ?

Partie III : Étude d'une suite et d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \;\; u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

14. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 3\,\mathrm{e}^n$. (On pourra utiliser des résultats de la partie I).

15. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et que u_n tend vers $+\infty$ lorsque l'entier n tend vers l'infini.

16. Écrire un programme en Turbo-Pascal qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 10^3$.

17. Quelle est nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$?

EXERCICE 2

On considère l'espace vectoriel $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

On définit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} ; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et que $(A,\, B,\, C)$ est une base de $\mathcal{E}$. Quelle est la dimension de $\mathcal{E}$?

2. Établir que $\mathcal{E}$ est stable par multiplication, c'est-à-dire :

$$\forall (M, N) \in \mathcal{E}^2, \quad MN \in \mathcal{E}.$$

3. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, si M est inversible, alors $M^{-1} \in \mathcal{E}$.

Pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, on note $f(M) = TMT$.

4. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

5. Vérifier que T est inversible et démontrer que f est un automorphisme de $\mathcal{E}$.

6. Est-ce que T est diagonalisable ?

On note F la matrice de f dans la base $(A,\, B,\, C)$ de $\mathcal{E}$.

7. Calculer $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ en fonction de $(A,\, B,\, C)$ et en déduire F.

8. Montrer que f admet une valeur propre et une seule et déterminer celle-ci, puis déterminer une base et la dimension du sous-espace propre pour f associé à cette valeur propre.

9. Est-ce que f est diagonalisable ?

10. Soit λ un réel différent de 1. Résoudre l'équation $f(M) = \lambda M$, d'inconnue $M \in \mathcal{E}$.

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

11. Calculer H^2, puis, pour tout a de $\mathbb{R}$ et tout n de $\mathbb{N}$, $(I + a\,H)^n$.

12. Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, F^n.

13. Trouver une matrice G de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $G^3 = F$.
Existe-t-il un endomorphisme g de $\mathcal{E}$ tel que $g \circ g \circ g = f$?

EXERCICE 3

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, dans laquelle on effectue une succession de $(n+1)$ tirages d'une boule avec remise et l'on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un numéro supérieur ou égal au numéro précédent.

Ainsi, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la variable aléatoire X_n prend ses valeurs dans $[\![2\,;n+1]\!]$.

Par exemple, si $n=5$ et si les tirages amènent successivement les numéros $5,3,2,2,6,3$, alors $X_5=4$.

Pour tout k de $[\![1\,;n+1]\!]$, on note N_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu au k-ième tirage.

Partie I : Étude du cas $n=3$

On suppose dans cette partie **uniquement** que $n=3$. L'urne contient donc les boules numérotées $1,2,3$.

1. a. Exprimer l'événement $(X_3=4)$ à l'aide d'événements faisant intervenir les variables aléatoires N_1, N_2, N_3. En déduire $\mathbf{P}(X_3=4)$.

b. Montrer que $\mathbf{P}(X_3=2)=\dfrac{2}{3}$, et en déduire $\mathbf{P}(X_3=3)$.

2. Calculer l'espérance de X_3.

Partie II : Cas général

Dans toute cette partie, n est un entier fixé supérieur ou égal à 2.

3. Pour tout k de $[\![1\,;n+1]\!]$, reconnaître la loi de N_k et rappeler son espérance et sa variance.

4. Calculer $\mathbf{P}(X_n=n+1)$.

5. Montrer, pour tout i de $[\![1\,;n]\!]$: $\quad \mathbf{P}_{(N_1=i)}(X_n=2)=\dfrac{n-i+1}{n}$.

6. En déduire une expression simple de $\mathbf{P}(X_n=2)$.

7. Soit $k\in[\![2\,;n]\!]$. Justifier l'égalité d'événements suivante : $\quad (X_n>k)=(N_1>N_2>\cdots>N_k)$.

En déduire : $\quad \mathbf{P}(X_n>k)=\dfrac{1}{n^k}\dbinom{n}{k}$.

Vérifier que cette dernière égalité reste valable pour $k=0$ et pour $k=1$.

8. Exprimer, pour tout $k\in[\![2\,;n+1]\!]$, $\mathbf{P}(X_n=k)$ à l'aide de $\mathbf{P}(X_n>k-1)$ et de $\mathbf{P}(X_n>k)$.

9. En déduire : $\quad \mathbf{E}(X_n)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}(X_n>k)$. Calculer ensuite $\mathbf{E}(X_n)$.

10. Montrer : $\quad \forall k\in[\![2\,;n+1]\!],\quad \mathbf{P}(X_n=k)=\dfrac{k-1}{n^k}\dbinom{n+1}{k}$.

Partie III : Une convergence en loi

On s'intéresse dans cette partie à la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 2}$.

11. Soit k un entier fixé supérieur ou égal à 2. Montrer : $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}(X_n=k)=\dfrac{k-1}{k!}$.

12. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2}\dfrac{k-1}{k!}$ converge et calculer sa somme.

On admet qu'il existe une variable aléatoire Z à valeurs dans $[\![2\,;+\infty[\![$ telle que :

$$\forall k\in[\![2\,;+\infty[\![,\quad \mathbf{P}(Z=k)=\frac{k-1}{k!}.$$

13. Montrer que Z admet une espérance et la calculer.

Comparer $\mathbf{E}(Z)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathbf{E}(X_n)$.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2014

EMLYON 2014 VOIE ECONOMIQUE

CORRIGE

Le langage turbo-Pascal n'étant plus du programme, nous n'avons pas traité les questions d'informatique.

EXERCICE I

PARTIE I : Etude de φ

1)

L'application $x \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe C^3 sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas.

L'application exponentielle est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$, donc par composition, l'application $x \mapsto \exp(\frac{1}{x})$ est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$.

L'application $x \mapsto x$ est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale.

Donc l'application $x \mapsto x\exp(\frac{1}{x})$ est de classe C^3 par produit et enfin, par différence,

$$\boxed{\text{l'application } \varphi \ : \ x \mapsto \exp(x) - x\exp(\tfrac{1}{x}) \text{ est de classe } C^3 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$$

$$\begin{aligned}
\forall x > 0,\ \varphi'(x) &= \exp(x) - \exp(\tfrac{1}{x}) + \tfrac{1}{x}\exp(\tfrac{1}{x}) \\
\varphi''(x) &= \exp(x) + \frac{1}{x^2}\exp(\tfrac{1}{x}) - \frac{1}{x^2}\exp(\tfrac{1}{x}) - \frac{1}{x^3}\exp(\tfrac{1}{x}) \\
&= \exp(x) - \frac{1}{x^3}\exp(\tfrac{1}{x}) \\
\varphi'''(x) &= \exp(x) + \frac{3}{x^4}\exp(\tfrac{1}{x}) + \frac{1}{x^5}\exp(\tfrac{1}{x})
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x > 0,\ \varphi'''(x) = \exp(x) + \frac{3x+1}{x^5}\exp(\tfrac{1}{x})}$$

2)

$\forall x > 0,\ \varphi'''(x) > 0$ car $\exp(x),\ x^5,\ 3x+1$ et $\exp(\frac{1}{x})$ sont > 0.

D'où le tableau de variations :

x	0		1		$+\infty$
$\varphi'''(x)$		$+$		$+$	
φ''		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

$\varphi''(1) = \exp(1) - \frac{1}{1^3}\exp(\frac{1}{1}) = e - e = 0.$

La fonction φ'' est strictement croissante sur $]0, +\infty[$; elle s'annule en 1, donc
$\forall x \in]0, 1[, \ \varphi''(x) < 0$ et $\forall x > 1, \ \varphi''(x) > 0.$
Traçons le tableau de variations de φ'.
Remarquons que la continuité de φ'' est inutile pour en déduire son signe ; le théorème " de la bijection " ne sert à rien non plus.

x	0		1		$+\infty$
$\varphi''(x)$		$-$	0	$+$	
φ'		$\searrow$	e	$\nearrow$	

La fonction φ' admet un minimum en 1 ; il vaut $\varphi'(1) = \exp(1) - \exp(1) + \frac{1}{1}\exp(\frac{1}{1}) = \boxed{e}$

$$\boxed{\forall x > 0, \ \varphi'(x) \geq e}$$

3)

$\lim\limits_{x\to 0^+} \exp(x) = \exp(0) = 1$ par continuité de l'exponentielle au point 0.

$\lim\limits_{x\to 0^+} x\exp(\frac{1}{x})$ est une forme indéterminée du type " $0 \times (\infty)$ " car $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \exp(\frac{1}{x}) = +\infty$.
Levons l'indétermination.
Posons $u = \frac{1}{x}$; $x \to 0^+ \iff u \to +\infty$.

$x\exp(\frac{1}{x}) = \frac{\exp(u)}{u}$. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\exp(\frac{1}{x}) = \lim\limits_{u\to+\infty} \frac{\exp(u)}{u} = +\infty$ par croissances comparées.

$\varphi(x) = x - x\exp(\frac{1}{x})$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \exp(x) = 1$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = -\infty}$

4)

$\forall x > 0, \ \frac{\varphi(x)}{x} = \frac{\exp(x)}{x} - \exp(\frac{1}{x}).$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty$ par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(\frac{1}{x}) = \exp(0) = 1$ par continuité de l'exponentielle au point 0. Par suite $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = +\infty}$

Par définition d'une limite, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = +\infty \iff \forall A > 0, \ \exists B > 0 \ / \ \forall x \geq B, \ \frac{\varphi(x)}{x} \geq A.$

Pour $A = 1$, $\exists X > 0 \ / \ \forall x \geq X$, $\frac{\varphi(x)}{x} \geq 1$. Donc $\forall x \geq X$, $\varphi(x) \geq x$ (on a multiplié l'inégalité précédente par $x > 0$.)

On en déduit $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty}$

5)

Soit $x \geq 3$. D'après la question 2), $\varphi'(x) \geq e$. Les bornes d'intégration (3 et x) sont dans l'ordre croissant, donc

$\int_3^x \varphi'(t)dt \geq \int_3^x e dt$, ce qui équivaut successivement à

$\Big[\varphi(t)\Big]_3^x \geq \Big[et\Big]_3^x$, puis à

$\varphi(x) - \varphi(3) \geq e(x-3)$ et enfin à

$\varphi(x) \geq ex - 3e + \varphi(3)$.

D'après l'énoncé, $\varphi(3) > 15$; $3e < 15$ car $e < 3$, donc $\varphi(3) - 3e > 0$; $ex + \varphi(3) - 3e > ex$, par suite

$$\boxed{\forall x \geq 3,\ \ \varphi(x) \geq ex}$$

6)

D'après la question 2), φ'' s'annule et change de signe si et seulement si $x = 1$.

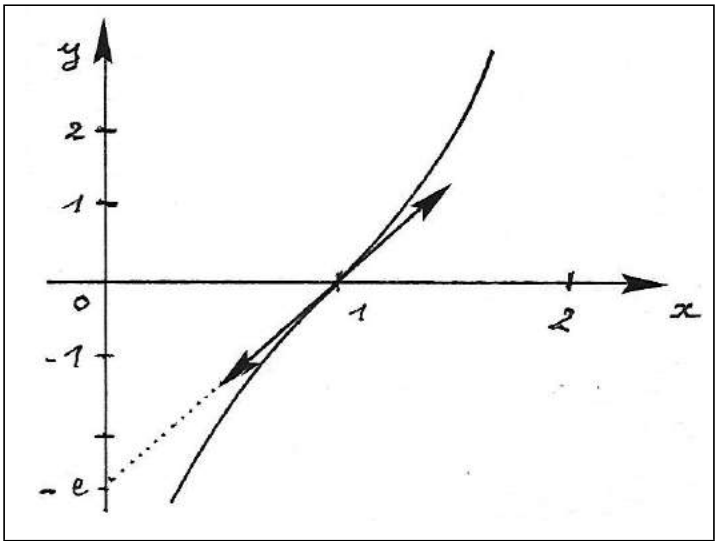
La courbe (C) représentative de φ admet un unique point d'inflexion au point de coordonnées $(1, \varphi(1)) = \boxed{(1, 0)}$

Une équation de la tangente en ce point est : $y = \varphi'(1)(x-1) + \varphi(1) \Longleftrightarrow \boxed{y = ex - e}$

7)

D'après l'étude de φ' faite à la question 2), $\forall x > 0 \geq \varphi'(x) \geq e > 0$. D'où le tableau de variations

x	0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$		$+$	
φ	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

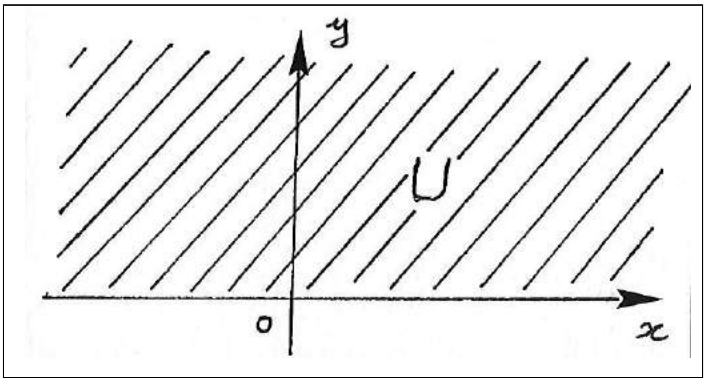


Au voisinage de 0, la courbe (C) admet l'axe des ordonnées comme asymptote puisque $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x) = +\infty$

Au voisinage de $+\infty$, la courbe (C) admet une branche parabolique de direction (Oy) puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\varphi(x)}{x} = +\infty$.

PARTIE II : Etude d'extremum pour une fonction réelle de deux variables réelles

8)



9)

La fonction $(x, y) \mapsto xy$ est de classe C^2 sur U en tant que fonction polynomiale.

Les fonctions $(x, y) \mapsto \exp(x)$ et $(x, y) \mapsto \ln y$ sont de classe C^2 sur U d'après le cours.

Par produit, la fonction $(x, y) \mapsto \exp(x) \ln y$ est de classe C^2 sur U ; par différence, la fonction $(x, y) \mapsto xy - \exp(x) \ln y$ est de classe C^2 sur U.

La fonction $f\ :\ (x, y) \mapsto xy - \exp(x) \ln y$ est de classe C^2 sur U

La fonction f admet donc des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 continues sur U. On peut appliquer le thèorème de Schwarz qui s'exprime ainsi

$$\forall (x, y) \in U,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

$\forall (x, y) \in U,$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y - \exp(x) \ln y = p(x, y).$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x - \dfrac{\exp(x)}{y} = q(x, y).$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -\exp(x) \ln y = r(x, y).$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \dfrac{\exp(x)}{y^2} = t(x, y).$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial (}x, y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 1 - \dfrac{\exp(x)}{y} = s(x, y).$

(Rappelons que p, q, r, s, t sont les notations de Monge).

10)

$(x, y) \in U$ est un point critique pour f si et seulement si $p(x, y) = q(x, y) = 0$.

$$\begin{cases} p(x, y) & = 0 \\ q(x, y) & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y - \exp(x) \ln y & = 0 \quad L_1 \\ x - \dfrac{\exp(x)}{y} & = 0 \quad L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} y & = \exp(x) \ln y \quad L_1 \\ x & = \dfrac{\exp(x)}{y} \quad L_2 \end{cases}$$

Remarquons que L_2 impose $x > 0$ puisque $y > 0$ d'après l'énoncé et $\exp(x) > 0$ d'après le cours.

Le système précédent équivaut successivement à

$$\begin{cases} y & = \exp(x) \ln y \quad L_1 \\ x & = \dfrac{\exp(x)}{y} \quad L_2 \\ x & > 0 \quad L_3\ ; \end{cases}$$