INFORMATIQUE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–15

On se donne un réel strictement positif λ et une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables binomiales telles que $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$. On se donne aussi une variable Y telle que $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

On sait que $\forall k \in \mathbb{N}, \lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = k) = P(Y = k)$.

Mais ce théorème ne dit pas si, pour un entier n fixé, $P(Y = k)$ est une bonne approximation de $P(X_n = k)$.

Pour le savoir, nous allons faire une étude numérique et en tirer une règle empirique.

1)

Ecrire une function Y=B(n,lambda) qui calcule b_k=P(X$_n = k$) pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ et donne en sortie Y=$[b_0, b_1, \ldots, b_n]$

2)

Ecrire une function Y=P(n,lambda) qui calcule p_k=P(Y=k) pour tout $k \in [\![0; n]\!]$ et donne en sortie Y=$[p_0, p_0, \ldots, p_n]$.

3)

Faire tracer les diagrammes en barres (ou en bâtons) des valeurs $P(X_n = k)$ et $P(Y = k)$ des lois de X_n et de Y pour $0 \leq k \leq 30$ dans les cas suivants :

i) $\lambda = 1$, $n = 10$, puis $n = 30$, puis $n = 50$.

ii) $\lambda = 4$, $n = 10$, puis $n = 30$, puis $n = 50$.

4)

Conclusion ?

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 15

1)

Rappelons que, si X suit la binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ alors

$X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et $\forall k \in [\![0,n]\!],\ P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ avec $q = 1-p$.

Pour $k+1 \leq n$,

$$\begin{aligned}\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} &= \frac{\binom{n}{k+1} p^{k+1} q^{n-k-1}}{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}} \\ &= \frac{n!k!(n-k)!p^{k+1}q^{n-k-1}}{(k+1)!(n-k-1)!n!p^k q^{n-k}} \\ &= \frac{n-k}{k+1}\frac{p}{q}\end{aligned}$$

Pour $k=n,\ P(X=n) = p^n$.

Nous avons donc une relation de récurrence entre $p_{k+1} = P(X=k+1)$ et $p_k = P(X=k)$.
Cette relation est

$\forall k \in [\![0,n-1]\!],\ p_{k+1} = p_k \times \dfrac{p(n-k)}{(k+1)q}$; décalons d'une cran :

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ p_k = \frac{p(n-k+1)}{kq} p_{k-1} \text{ et } p_0 = q^n$$

Nous allons stocker ces valeurs dans une matrice $Y \in \mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$ en remarquant que $Y(k+1) = p_k$.

Pour des commodités d'écriture, nous noterons $p = \dfrac{\lambda}{n}$.

```
function Y=B(n,lambda)
Y=zeros(1,n+1) // matrice ligne de longueur n+1 formée de zéros
p=lambda/n
q=1-p
Y(1)=q^n // c'est p0
for k=1:n
Y(k+1)=(p*(n-k+1)/(q*k)*Y(k)
end
endfunction
```

2)

Si Y suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, alors

$Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ q_k = P(Y=k) = \exp(-\lambda)\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

Nous avons donc la relation de récurrence

$$q_0 = \exp(-\lambda) \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{q_k}{q_{k-1}} = \frac{\lambda}{k} \Longleftrightarrow q_k = \frac{\lambda}{k} \times q_{k-1}$$

```
function Y=P(n,lambda)
Y=zero(1,n+1)
```