INFORMATIQUE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–25

1)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{x+4}{x+1}$.

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 > 0$ et la realtion

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

Etudier cette suite : existence, monotonie, convergence et limite éventuelle

2)

Ecrire une function courbe(a,b) qui trace la courbe de f et la bissectrice entre deux réels a et b.

3)

Ecrire une fonction dessin(u) qui

– affecte à n la valeur 5,

– construit la matrice A=$\begin{pmatrix} u_0 & u_0 & u_1 & u_1 & \dots & u_k & u_k & \dots & u_n & u_n \\ 0 & u_1 & u_1 & u_2 & \dots & u_k & u_{k+1} & \dots & u_n & u_{n+1} \end{pmatrix}$

– trace la ligne brisée des points A_k de coordonnées (u_k, u_k) et des points A'_k de coordonnées (u_k, u_{k+1}) et la bissectrice dans le même repère.

4)

Représenter dans le même repère la ligne brisée, la bissectrice et la courbe entre deux réels a et b.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 25

1)

Etudions frapidement le fonction f. Elle est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que fraction rationnelle, le dénominateur ne s'annulant pas.

$\forall x >> 0,\ f'(x) = -\dfrac{3}{(x+1)^2}$

D'où le tableau de variations de f.

x	0		
$f'(x)$		$-$	
f	4	$\searrow$	1

Il apparaît que $\forall x > 0,\ f(x) > 0$.

Une récurrence facile montre que $\forall n \geq 0,\ u_n$ existe et $\forall n \geq 1,\ u_n > 0$.

La fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$; $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$, donc la suite n'est pas monotone.

Posons $v_n = u_{2n}$; on aura $v_{n+1} = (f \circ f)(v_n)$. La fonction $g = f \circ f$ est croissante (composée de deux fonctions croissantes), la suite (v_n) est monotone.

D'après le tableau de variations de f, $u_n \in [1,4]$ pour $n \geq 1$; la suite (v_n) est majorée par 4, elle converge donc vers un réel $\ell \in [1,4]$.

Détermination de ℓ. Puisque g est continue sur $\mathbb{R}_+$ par composition ; g est une fraction rationnelle définie sur $\mathbb{R}_+$ comme nous allons le vérifier à l'instant.

Par suite, ℓ est solution de $g(x) = x$ avec $x \in [1,4]$.

$$\begin{aligned}
\forall x \geq 0,\ g(x) &= \frac{f(x)+4}{f(x)+1} \\
&= \frac{\dfrac{x+4}{x+1}+4}{\dfrac{x+4}{x+1}+1} \\
&= \frac{5x+8}{2x+5} \\
g(x)-x &= \frac{5x+8}{2x+5} - x \\
&= 2\frac{4-x^2}{2x+5}
\end{aligned}$$

Cette équation a une seule solution sur $[1,4]$: c'est 2.

La suite (v_n) converge vers 2.

La même démonstration montre que la suite (w_n) définie par : $\forall n \subset \mathbb{N},\ w_n = u_{2n+1}$ converge aussi vers 2.

Les deux suites extraites d'indices pairs et impairs convergent vers une même limite.

La suite (u_n) est convergente vers $\ell = 2$

On peut remarquer que le réel 2 est aussi le point fixe de la fonction f.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.