BCE

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 280

Conception : HEC Paris

MATHÉMATIQUES

OPTION : SCIENTIFIQUE

Mercredi 29 avril 2015, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

---

L'objet du problème est d'aborder quelques questions mathématiques relatives au comportement asymptotique de systèmes dynamiques discrets ou continus susceptibles de modéliser l'évolution temporelle de divers phénomènes, en particulier économiques (croissance économique, prix d'équilibre, etc.).

Les trois parties du problème sont indépendantes.

Dans tout le problème :

- On note p un entier supérieur ou égal à 1.
- Pour tout vecteur $b \in \mathbb{R}^p$, on note B la matrice colonne de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$.
- La transposée d'une matrice A est notée A^T. La matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est notée I_p.
- Pour toute application x : $\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ t & \longmapsto & x(t) = \big(x_1(t), \ldots, x_p(t)\big)\end{array}$, on note :
  - $\star$ $x'(t) = \big(x_1'(t), \ldots, x_p'(t)\big)$ en tout point $t \in \mathbb{R}_+$ où les fonctions $x_1, \ldots, x_p$ sont dérivables ;
  - $\star$ $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = \big(\lim\limits_{t\to+\infty} x_1(t), \ldots, \lim\limits_{t\to+\infty} x_p(t)\big)$ lorsque les fonctions $x_1, \ldots, x_p$ admettent des limites finies lorsque t tend vers $+\infty$.
- Pour toute suite $\big(x(n)\big)_{n\in\mathbb{N}} = \big(x_1(n), \ldots, x_p(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^p$ pour laquelle les suites $\big(x_1(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, \big(x_p(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, on définit la limite de la suite $\big(x(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
  - $\star$ $\lim\limits_{n\to+\infty} x(n) = \big(\lim\limits_{n\to+\infty} x_1(n), \ldots, \lim\limits_{n\to+\infty} x_p(n)\big)$.

Partie I. Deux exemples de pilotage linéaire.

Soit A une matrice non nulle de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^p$. Soit $x_1, \ldots, x_p$ p fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$. On dit qu'une application $x : t \longmapsto x(t) = \big(x_1(t), \ldots, x_p(t)\big)$ définie sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, est *pilotée par le couple* (A, b), si pour tout réel $t \geqslant 0$, les matrices colonnes $X(t)$ et $X'(t)$ de $x(t)$ et $x'(t)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$ vérifient le système : $\forall t \geqslant 0$, $X'(t) = AX(t) + B$.
On appelle *équilibre du système piloté par le couple* (A, b), tout vecteur $x^* \in \mathbb{R}^p$ vérifiant : $AX^* + B = 0$.

Tournez la page S.V.P.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 24 pages.

On dit qu'un équilibre x^* est *attractif* si pour toute application x pilotée par (A,b), on a : $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = x^*$.

1. *Le cas p=1.*

   Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et x une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs réelles, vérifiant : $\forall t \geqslant 0,\ x'(t) = ax(t) + b$.

   a) Calculer la dérivée de la fonction $y : t \longmapsto \left(x(t) + \dfrac{b}{a}\right) \mathrm{e}^{-a\,t}$.

   b) En déduire que pour tout $t \geqslant 0$, on a : $x(t) = -\dfrac{b}{a} + \left(x(0) + \dfrac{b}{a}\right) \mathrm{e}^{a\,t}$.

   c) On identifie a à la matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ dont l'unique coefficient est a. Montrer que le système piloté par le couple (a,b) admet un unique équilibre, puis montrer que cet équilibre est attractif si et seulement si $a < 0$.

2. *Exemple 1.* Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $b = (1,1)$. Soit $x : t \longmapsto x(t) = \big(x_1(t), x_2(t)\big)$ une application définie sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, pilotée par le couple (A,b).

   a) Déterminer l'unique équilibre x^* du système piloté par le couple (A,b).

   b) Justifier l'existence d'une matrice inversible Q telle que la matrice $Q^{-1}AQ$ soit diagonale.
   Pourquoi peut-on choisir la matrice Q de telle manière que $Q^{-1} = Q^T$?

   c) Trouver deux réels λ et μ $(\lambda \leqslant \mu)$ et une matrice inversible Q vérifiant : $Q^{-1} = Q^T$ et $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

   d) Pour tout $t \geqslant 0$, on pose : $W(t) = Q^T X(t)$.

      (*i*) Vérifier pour tout $t \geqslant 0$, l'égalité : $W'(t) = DW(t) + Q^T B$ où $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

      (*ii*) À l'aide des résultats de la question 1, en déduire que l'équilibre x^* est attractif.

3. On suppose $p \geqslant 2$. Soit $\mathcal{B}_p = (e_1, \ldots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{C}^p$ et u_p l'unique endomorphisme de $\mathbb{C}^p$ tel que $u_p(e_1) = e_p$ et pour tout $k \in [\![2, p]\!]$, $u_p(e_k) = e_{k-1}$.

   a) Écrire la matrice A_p de l'endomorphisme u_p dans la base $\mathcal{B}_p$. Quel est son rang ?

   b) Soit $\varepsilon \in \mathbb{C}$ une racine p-ième de l'unité et G la matrice colonne de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ de composantes $1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{p-1}$.
   Montrer que G est un vecteur propre de A_p et préciser la valeur propre complexe associée.

   c) Montrer que l'endomorphisme u_p est diagonalisable.

   d) Montrer que le polynôme $X^p - 1$ de $\mathbb{C}[X]$ est un polynôme annulateur de u_p.
   L'endomorphisme u_p admet-il un polynôme annulateur non nul de degré strictement inférieur à p ?

   e) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. L'endomorphisme $P(u_p)$ de $\mathbb{C}^p$ est-il diagonalisable ? Quelles sont ses valeurs propres ?

4. *Exemple 2.* Soit α et β deux réels tels que $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha \neq \beta$, $\alpha + \beta \neq 1$ et $M = \begin{pmatrix} -1 & \alpha & \beta \\ \beta & -1 & \alpha \\ \alpha & \beta & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   a) On note A la matrice A_p de la question 3 dans le cas où $p = 3$.

      (*i*) Déterminer un polynôme P à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2, tel que $M = P(A)$.

      (*ii*) En déduire les valeurs propres complexes de M ainsi que leurs parties réelles et imaginaires respectives.

   b) Soit $c = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$.

      (*i*) Trouver l'unique équilibre x^* du système piloté par le couple (M,c).

      (*ii*) Vérifier que l'application $x : t \longmapsto x(t) = x^* + \mathrm{e}^{(\alpha+\beta-1)t} c$ est pilotée par le couple (M,c).

      (*iii*) En déduire une condition nécessaire portant sur α et β pour que l'équilibre x^* soit attractif.

On suppose désormais que la condition précédente est réalisée.

   c) On pose : $N = M^T + M$.

      (*i*) Quelles sont les valeurs propres de la matrice N ?

      (*ii*) Déterminer un réel $\theta > 0$ tel que toutes les valeurs propres de N soient inférieures ou égales à $-2\,\theta$.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 24 pages.

d) On rappelle que $c = (1, 1, 1)$. On considère une application x pilotée par le couple (M, c).
On note y l'application définie sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, telle que $y : t \longmapsto x(t) - x^*$ et φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs réelles, telle que $\varphi : t \longmapsto \mathrm{e}^{2\theta t}\,\|Y(t)\|^2$, où $\|.\|$ est la norme euclidienne canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
(*i*) Vérifier que l'application y est pilotée par le couple $(M, 0_{\mathbb{R}^3})$.
(*ii*) Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \varphi'(t) = \mathrm{e}^{2\theta t} \times Y(t)^T \big(N + 2\,\theta I_3\big) Y(t)$.
(*iii*) Montrer que la fonction φ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
(*iv*) En déduire que l'équilibre x^* est attractif.

Partie II. Un exemple de pilotage non linéaire.

Un exemple de *pilotage non linéaire* est fourni par un modèle de croissance économique endogène à deux secteurs dans lequel le taux de croissance du stock de capital et le taux de croissance du stock de connaissances sont représentés, depuis une date choisie comme origine, par des fonctions x_1 et x_2 respectivement.
Dans ce modèle où ρ désigne un paramètre réel strictement positif, les deux fonctions x_1 et x_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs réelles, et vérifient le système :

$$\forall t \geqslant 0,\ \begin{cases} x_1'(t) = F_1\big(x_1(t), x_2(t)\big) \\ x_2'(t) = F_2\big(x_1(t), x_2(t)\big) \end{cases} \qquad (S)$$

dans lequel les deux fonctions F_1 et F_2 définies sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles, sont données par :

$$\forall\,(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} F_1(u_1, u_2) = \big(-u_1 + \rho(u_2 - u_1) + 1\big)\,u_1 \\ F_2(u_1, u_2) = \big(-u_2 + \rho(u_1 - u_2) + 1\big)\,u_2 \end{cases}.$$

5.a) Pour tout réel $\nu > -1$, on pose : $\forall t \geqslant 0,\ x_1(t) = x_2(t) = \dfrac{1}{1 + \nu\,\mathrm{e}^{-t}}$.
Vérifier que l'application $x : t \longmapsto \big(x_1(t), x_2(t)\big)$ est solution du système (S).
b) En déduire que pour tout réel $c \in]0, 1[$, il existe une solution de (S) à valeurs dans $[\,c, +\infty[^{\,2}$.
c) Quel est l'unique couple $x^* = (x_1^*, x_2^*) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ vérifiant $F_1(x_1^*, x_2^*) = 0$ et $F_2(x_1^*, x_2^*) = 0$?
d) Toutes les solutions de (S) convergent-elles vers x^* lorsque t tend vers $+\infty$?

6. Pour tout réel r, on note q_r la forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ associée à la matrice symétrique $Q_r = \begin{pmatrix} 1 & -r \\ -r & 1 \end{pmatrix}$.
On note $\mathcal{C}_r$ l'ensemble défini par : $\mathcal{C}_r = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2;\ q_r(u_1, u_2) = 1\}$.
a) Pour quelles valeurs de r la forme quadratique q_r est-elle définie positive ? Que peut-on dire alors de la partie $\mathcal{C}_r$ de $\mathbb{R}^2$?

Dans toute la suite de cette question, r et s sont deux réels vérifiant les inégalités : $0 < s < r < 1$.

b) Justifier que l'ensemble $\{q_s(u_1, u_2);\ (u_1, u_2) \in \mathcal{C}_r\}$ admet une borne inférieure, notée $m_{r,s}$, et une borne supérieure, notée $M_{r,s}$, et que ces deux bornes sont atteintes.
c) Justifier que la contrainte d'appartenance à l'ensemble $\mathcal{C}_r$ est non critique.
d) Énoncer la condition nécessaire du premier ordre pour un extremum de q_s sous la contrainte $\mathcal{C}_r$.
e) En déduire les valeurs de $m_{r,s}$ et $M_{r,s}$ et établir l'existence d'un réel μ tel que :

$$\forall\,(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2,\ q_s(u_1, u_2) \leqslant \mu\, q_r(u_1, u_2)\,.$$

7. On conserve les notations de la question 6.

a) Soit $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(u_1, u_2) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(v_1 - v_2, v_1 + v_2)$.
Vérifier que $(u_1, u_2) \in \mathcal{C}_r$ si et seulement si on a : $(1 - r)\,(v_1)^2 + (1 + r)\,(v_2)^2 = 1$.

Tournez la page S.V.P.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 24 pages.

On se place désormais dans le cas où $r = \dfrac{1}{2}$ et $s = \dfrac{1}{4}$.

b) Pour faire tracer par *Scilab* le domaine C_r, on peut utiliser le code suivant qui donne le graphique ci-dessous :

(1) `n=100;`

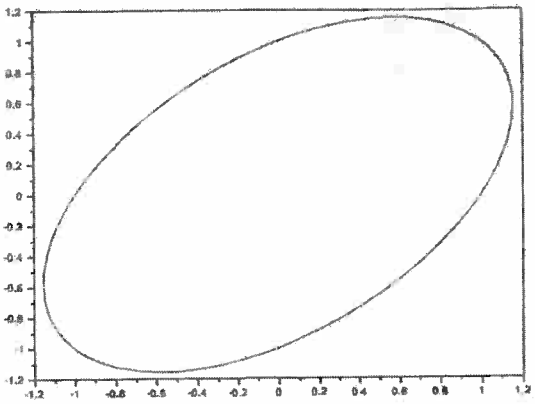
(2) `theta=linspace(0,2*%pi,n);`

(3) `ct=cos(theta);`

(4) `st=sin(theta);`

(5) `Cr=[ct-(1/sqrt(3))*st;ct+(1/sqrt(3))*st];`

(6) `plot(Cr(1, :),Cr(2, :))`



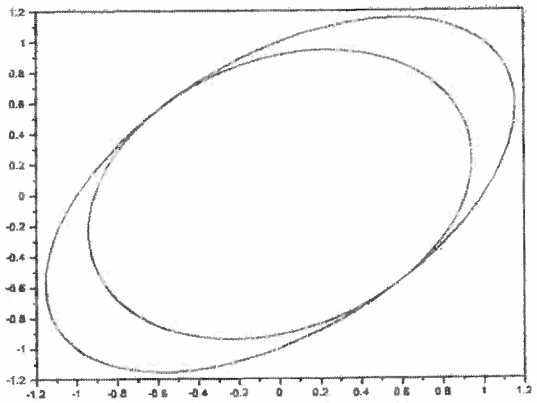
En s'appuyant sur le résultat de la question 7.a), expliquer la méthode employée.
On précisera la signification de la ligne (2) ainsi que le format et le contenu des matrices `Cr` et `Cr(1,:)`.

c) Soit $z_0 > 0$ une valeur affectée à la variable z utilisée ci-dessous. Compléter la ligne (7) afin de tracer la ligne de niveau z_0 de la fonction q_s.

(7) `Csz=[sqrt(z)*(?? *ct+?? *st); sqrt(z)*(?? *ct+?? *st)];`

(8) `plot(Csz(1, :),Csz(2, :))`

d) Le graphique suivant a été obtenu à l'aide des deux scripts précédents pour une valeur z_0 affectée à la variable z. Laquelle ?
On justifiera la réponse donnée et on précisera pourquoi les deux courbes ont des tangentes communes.



8. Soit c un réel de $]0,1[$ et x une solution de (S) à valeurs dans $[c,+\infty[^2$.
On pose pour tout $t \geqslant 0$: $y_1(t) = x_1(t) - 1$ et $y_2(t) = x_2(t) - 1$. Pour $s = \dfrac{\rho}{1+\rho}$, on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs réelles, telle que $f(t) = q_s\big(y_1(t), y_2(t)\big)$.

a) Vérifier pour tout $t \geqslant 0$, l'égalité : $f'(t) = -2(1+\rho)\Big(x_1(t)\big(y_1(t) - s\,y_2(t)\big)^2 + x_2(t)\big(y_2(t) - s\,y_1(t)\big)^2\Big)$.

b) En déduire que pour $r = \dfrac{2s}{1+s^2}$, on a pour tout $t \geqslant 0$: $f'(t) \leqslant -2\,c \times \dfrac{1-s}{1-r} \times q_r\big(y_1(t), y_2(t)\big)$.

c) Justifier pour tout $t \geqslant 0$, l'inégalité : $f'(t) \leqslant -2\,c\,f(t)$. En déduire que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

9. Quelle propriété peut-on déduire de l'étude précédente pour toute solution de (S) dont chacune des composantes admet un minorant strictement positif ?

Extrait gratuit de document, le document original comporte 24 pages.

Partie III. Pilotage pas à pas dans un contexte aléatoire.

Dans cette partie, on s'intéresse à un exemple de système se présentant sous la forme d'une équation de récurrence dont les coefficients sont soumis à une perturbation aléatoire.

On suppose $p \geqslant 2$. Soit A une matrice non nulle de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^p$.
Soit $\big(x(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^p$ définie par son terme initial $x(0)$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X(n+1) = AX(n) + B\,.$$

On appelle *équilibre du système piloté pas à pas par le couple* (A, b), tout vecteur $x^* = (x_1^*, \ldots, x_p^*) \in \mathbb{R}^p$ qui vérifie : $X^* = AX^* + B$.
On suppose qu'il existe une matrice inversible $Q \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que la matrice $D = Q^{-1}AQ$ soit diagonale et que tous les coefficients diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ de D appartiennent à l'intervalle ouvert $]-1, +1[$.

10. Montrer que le système piloté pas à pas par le couple (A, b) admet un unique équilibre x^*.

La perturbation aléatoire du système se traduit par le fait que les coordonnées de x^* sont des paramètres inconnus qu'on peut chercher à estimer à partir des données observées que constituent les valeurs successives de vecteurs aléatoires $y(n) = \big(y_1(n), \ldots, y_p(n)\big)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ et soumis au système perturbé.

Soit $\big(U_n\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, centrées et admettant chacune un moment d'ordre 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $v_n = V(U_n)$ la variance de U_n.
Soit $x(0) \in \mathbb{R}^p$ et $\big(y(n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ définie par :

$$\begin{cases} Y(1) = \big(A + U_1 I_p\big)\, X(0) + B \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ Y(n+1) = \big(A + U_{n+1} I_p\big)\, Y(n) + B \end{cases}$$

où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y(n)$ est la matrice colonne $\big(y_k(n)\big)_{1\leqslant k\leqslant p}$.

11. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbf{E}\big(y(n)\big)$ le vecteur $\Big(E\big(y_1(n)\big), \ldots, E\big(y_p(n)\big)\Big) \in \mathbb{R}^p$ et $\mathbf{E}\big(Y(n)\big)$ la matrice colonne de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$.
   a) Calculer $\mathbf{E}\big(Y(1)\big)$ et justifier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité : $\mathbf{E}\big(Y(n+1)\big) - X^* = A\Big(\mathbf{E}\big(Y(n)\big) - X^*\Big)$.
   b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{E}\big(y(n)\big) = x^*$.

12. Soit $\big(z(n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Z(n) = Q^{-1}Y(n)$.
   a) Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![1, p]\!]$, que : $V\big(z_k(n+1)\big) = (\lambda_k^2 + v_{n+1})V\big(z_k(n)\big) + v_{n+1}\Big(E\big(z_k(n)\big)\Big)^2$.
   b) En déduire que si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et de limite nulle, alors il existe un réel $c_k \in]\,0, 1[$, un entier naturel N et un réel $M_k > 0$ tels que : $\forall n \geqslant N,\ V\big(z_k(n+1)\big) \leqslant c_k V\big(z_k(n)\big) + M_k\, v_{n+1}$.

13. On suppose que la série de terme général v_n est convergente. Soit $k \in [\![1, p]\!]$.
   Avec les notations de la question 12.b), on pose pour tout $m \in \mathbb{N}$: $\alpha_m = V\big(z_k(N+m)\big)$ et $w_m = M_k\, v_{N+m+1}$.
   a) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a : $\alpha_{m+1} \leqslant (c_k)^{m+1}\alpha_0 + \sum\limits_{j=0}^{m} w_j (c_k)^{m-j}$.
   b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} V\big(z_k(n)\big) = 0$.
   c) Montrer que la suite $\big(y_k(n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers x_k^*.

Grâce aux résultats des questions 11.b) et 13.c), on peut dire que $\big(y(n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est une suite d'estimateurs de* x^* *asymptotiquement sans biais et convergente.*

Extrait gratuit de document, le document original comporte 24 pages.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2015

HEC 2015 VOIE S

CORRIGE

PARTIE I : deux exemples de pilotage linéaire

1–a)

La fonction y est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que produit de fonctions qui le sont.

$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ y'(t) = x'(t)e^{-at} - a(x(t) + \frac{b}{a})e^{-at} = (x'(t) - ax(t) - b)e^{-at}$.

Or x' vérifie la relation : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ x'(t) = ax(t) + b$, par conséquent $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+,\ y'(t) = 0}$

1–b)

La fonction y est constante sur $\mathbb{R}_+$;

$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ y(t) = y(0) = x(0) + \frac{b}{a} \iff (x(t) + \frac{b}{a})e^{-at} = x(0) + \frac{b}{a}$. En multipliant des deux côtés par e^{at}, il vient

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+,\ x(t) = -\frac{b}{a} + (x(0) + \frac{b}{a})e^{at}}$$

1–c)

x^* est un équilibre du système piloté par (a, b) si et seulement si $ax^* + b = 0$, ce qui équivaut à $\boxed{x^* = -\frac{b}{a}}$

Soit x une application pilotée par (a, b) : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ x(t) = -\frac{b}{a} + (x(0) + \frac{b}{a})e^{at}$

Le point x^* est un point d'équilibre pour toute solution du système piloté par (a, b), donc en particulier pour les solutions non constantes. Considérons des solutions non constantes, c'est-à-dire telles que $x(0) + \frac{b}{a} \neq 0$.

$x(t) - x^* = (x(0) + \frac{b}{a})e^{at}$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = x^* \iff \lim\limits_{t\to+\infty} e^{at} = 0 \iff a < 0$.

$$\boxed{\text{L'équilibre } x^* = -\frac{b}{a} \text{ est attractif si et seulement si } a < 0}$$

Une autre façon de procéder

Si $a < 0$, alors $\lim\limits_{t\to+\infty} \Big(-\frac{b}{a} + (x(0) + \frac{b}{a})e^{at}\Big) = -\frac{b}{a} = x^*$.

Si $a > 0$, on considère une solution telle que $x(0) + \frac{b}{a} > 0$ par exemple ; dans ces conditions $\Big(-\frac{b}{a} + (x(0) + \frac{b}{a})e^{at}\Big) = +\infty$.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 24 pages.

Or x^* est attractif si et seulement si, pour **toute** solution $\lim\limits_{t\to+\infty}(t) = x^*$. Par conséquent, $x^* = -\dfrac{b}{a}$ est attractif si et seulement si $a < 0$.

2–a)

$x^* = (x_1, x_2)$ est un équilibre du système si et seulement si

$$A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}-2x_1 + x_2 + 1 &= 0\\ x_1 - 2x_2 + 1 &= 0\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}-2x_1 + x_2 + 1 &= 0\\ -3x_2 + 3 &= 0\end{cases}$$

On a effectué $L_2 \longleftarrow 2L_2 + L_1$; la résolution donne $x_1 = x_2 = 1$.

L'équilibre du système piloté par (A, b) est $x^* = (1, 1)$

2–b)

La matrice A est symétrique réelle ; elle est diagonalisable en base orthonormée. Il existe donc une matrice $Q \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, inversible telle que $Q^{-1} = Q^T$ et il existe une matrice D diagonale telle que $Q^{-1}AQ = D$.

2–c)

- Recherche des valeurs propres ; soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$A - \lambda I = \begin{pmatrix}-(2+\lambda) & 1\\ 1 & -(2+\lambda)\end{pmatrix}$ $L_2 \longleftrightarrow L_1$, puis $L_2 \longleftarrow L_2 + (2+\lambda)L_1$; cela donne $\begin{pmatrix}1 & -(2+\lambda)\\ 0 & 1-(2+\lambda)^2\end{pmatrix}$

λ est valeur propre de A si et seulement si $(2+\lambda)^2 = 1 \iff \lambda = -1$ ou $\lambda = -3$.

Notons $E(\lambda, A)$ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ. Un calcul facile donne

$E(-1, A) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ et $E(-3, A) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$.

$\lambda = -3$ et $\mu = -1$

La matrice de passage est $\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$. Cette matrice doit être orthogonale, il faut donc normer les vecteurs colonnes.

$Q = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$; la matrice D est $\text{Diag}(-3, -1)$ et $Q^TAQ = \begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

2–d)

Etablissons un résultat général dont on se servira par la suite.

Soit $W(t) = (w_k(t)) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; $H = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X(t) = (x_k(t)) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $W(t) = HX(t)$.

Supposons W et X dérivables ; $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $w_j(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j}x_i(t)$. Dérivons cette égalité ;

$\forall j \in [\![1, n]\!]$, $w_j'(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j}x_i'(t)$, ce qui se traduit par $W'(t) = HX'(t)$.

i) x est pilotée par $(A, b) \iff \forall t \geq 0,\ X'(t) = AX(t) + B$.

$$\forall t \geq 0,\ W'(t) = Q^TX'(t) = Q^T(AX(t) + B)$$
$$= Q^TAX(t) + Q^TB$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 24 pages.

Or $Q^TAQ = D \iff Q^TA = DQ^T$ après avoir multiplié à droite des deux côtés par la matrice inversible Q^T.

L'égalité précédente donne $W'(t) = DQ^TX(t) + Q^TB = DW(t) + Q^TB$

$$\boxed{\forall t \geq 0,\ W'(t) = DW(t) + Q^TB}$$

ii) Rappelons que l'équilibre du système est $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Notons w_1 et w_2 le coordonnées de W dans la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

$$Q^TB = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

D'après le point précédent,

$$W'(t) = DW(t) + Q^TB \iff \begin{pmatrix} w_1'(t) & = -3w_1(t) \\ w_2'(t) & = -w_2(t) + \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

w_1 est pilotée par le couple $(-3, 0)$.

L'équilibre de ce système est $\alpha \in \mathbb{R}\ /\ -3\alpha + 0 = 0 \iff \alpha = 0$. D'après la question précédente, $\lim\limits_{t\to+\infty} w_1(t) = 0$ puisque $-3 < 0$.

w_2 est pilotée par le couple $(-1, \sqrt{2})$.

L'équilibre de ce système est $\beta \in \mathbb{R}\ /\ -\beta + \sqrt{2} = 0 \iff \beta = \sqrt{2}$. D'après la question précédente,

$\lim\limits_{t\to+\infty} w_2(t) = \sqrt{2}$ puisque $-1 < 0$.

D'autre part, $W = Q^TX \iff X = QW$ (car $Q^T = Q^{-1}$), donc après un calcul facile,

$x_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(w_1(t) + w_2(t))$ et $x_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-w_1(t) + w_2(t))$.

On en déduit que $\lim\limits_{t\to+\infty} x_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0 + \sqrt{2}) = 1$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} x_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-0 + \sqrt{2}) = 1$.

$\lim\limits_{t\to+\infty} X(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = B$

$$\boxed{\text{L'équilibre } x^* = (1, 1) \text{ est attractif}}$$

3–a)

Rappelons que $\varepsilon \in \mathbb{C}$ est une racine p ème de l'unité si et seulement si $\varepsilon^p = 1$.

$$A_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'endomorphisme u_p transforme la base $(e_1, e_2, \ldots, e_{p-1}, e_p)$ en $(e_p, e_1, \ldots, e_{p-2}, e_{p-1})$, qui est une base de $\mathbb{C}^p$; c'est donc un automorphisme de $\mathbb{C}^p$ et par suite

$$\boxed{\text{Le rang de } A_p \text{ (donc celui de } u_p) \text{ est égal à } p}$$

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 24 pages.

3–b)

$$A_p \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \vdots \\ \varepsilon^{p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \vdots \\ \varepsilon^{p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon^2 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon^2 \\ \vdots \\ \varepsilon^p \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \vdots \\ \varepsilon^{p-1} \end{pmatrix}$$

$$A_p \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \vdots \\ \varepsilon^{p-1} \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \vdots \\ \varepsilon^{p-1} \end{pmatrix} :$$

le vecteur $G = \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \vdots \\ \varepsilon^{p-1} \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A_p associé à la valeur propre ε

3–c)

Il y a p racines p èmes distinctes de l'unité dans $\mathbb{C}$, donc A_p (et u_p) possède au moins p valeurs propres distinctes ; comme $\dim \mathbb{C}^p = p$, il n'en possède pas d'autres.

l'endomorphisme $u_p \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^p)$ possède p valeurs distinctes, il est diagonalisable

3–d)

Notons $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$ les p racines p èmes de l'unité. On a donc $\forall k \in [\![1, p]\!],\ \varepsilon_k^p = 1$.

Il existe $Q \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, inversible, telle que $A_p = Q\,\mathrm{Diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p)Q^{-1}$.

$A_p^p = Q\,\mathrm{Diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p)^p Q^{-1} = Q\,\mathrm{Diag}(1, 1, \ldots, 1)Q^{-1} = QI_pQ^{-1} = I_p$.

$A_p^p - I_p = (0)$: le polynôme $X^p - 1$ est annulateur de A_p

Soit R un polynôme annulateur de u_p. D'après le cours, les valeurs propres de u_p sont des racines de R. Par conséquent, R possède (au moins) p racines distinctes ; il en résulte que $\deg(R) \geq p$.

u_p n'admet pas de polynôme annulateur de degré strictement inférieur à p

3–e)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$; il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. (Si P est le polynôme nul, on prend un entier n quelconque et $(a_0, a_1, \ldots, a_n) = (0, 0, \ldots, 0)$).

Notons $D = \mathrm{Diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p)$.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 24 pages.