Code sujet : 297

Conception : EDHEC

MATHÉMATIQUES

OPTION : SCIENTIFIQUE

Mardi 5 Mai 2015, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document, seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n(x+1)}$.

1) Vérifier que I_n est une intégrale convergente.

2) a) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout x différent de -1 et 0, on ait :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x+1}$$

b) En déduire la valeur de I_1.

3) a) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$$

b) En déduire l'existence et la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

4) a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, calculer $I_n + I_{n+1}$.

b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

c) En déduire un équivalent de I_n puis donner la nature de la série de terme général I_n.

5) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $J_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n(x+1)^2}$.

a) Montrer que J_n est une intégrale convergente.

b) Calculer J_0.

6) a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer $J_k + J_{k-1}$ en fonction de I_k.

b) Déterminer alors, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'expression de $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}I_k$ en fonction de J_n.

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $0 \leq J_n \leq \dfrac{1}{4(n-1)}$. Donner la valeur de $\lim_{n\to+\infty} J_n$.

d) En déduire que la série de terme général $(-1)^{n-1} I_n$ est convergente et donner sa somme.

7) À l'aide des questions 4a) et 6a), compléter les commandes `Scilab` suivantes afin qu'elles permettent le calcul de I_n et J_n pour une valeur de n, supérieure ou égale à 2, entrée par l'utilisateur.

```
n = input('entrez une valeur de n supérieure ou égale à 2 :')
I = log(2) ; J = 1/2 ; J = ------
for k = 2:n
I = ------ ; J = ------ ; end
disp(I, 'la valeur de I est :')
disp(J, 'la valeur de J est :')
```

Exercice 2

On considère une variable aléatoire X suivant la loi normale centrée réduite (d'espérance nulle et de variance égale à 1) et on note Φ la fonction de répartition de X.

On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire. On note F_Y la fonction de répartition de Y.

1) a) Exprimer, pour tout réel x positif, $F_Y(x)$ à l'aide de $\Phi(x)$. En déduire que Y est une variable aléatoire à densité et donner une densité f_Y de Y.

b) Montrer que Y possède une espérance et donner sa valeur.

c) Montrer que Y possède une variance et donner sa valeur.

2) On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{\pi x}} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

a) Vérifier, en justifiant que l'on peut procéder au changement de variable $u = \sqrt{2t}$, que :

$$\int_0^{+\infty} g(t)dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}du$$

b) En déduire que g peut être considérée comme une densité.

On considère, dans la suite, une variable aléatoire Z de densité g et on note G sa fonction de répartition.

3) a) On pose $T = \sqrt{2Z}$ et on admet que T est une variable aléatoire à densité. Exprimer la fonction de répartition F_T de T en fonction de G puis en déduire une densité f_T de T et vérifier que T suit la même loi que Y.

b) En déduire que Z possède une espérance et donner sa valeur.

4) Écrire une commande `Scilab` permettant de simuler la variable aléatoire Z.

5) On considère les commandes `Scilab` suivantes :

```
n=input('entrez la valeur de n : ')
w=grand(1,n,'exp',1)
s=sum(w.*sqrt(w))/n/sqrt(%pi)
```

a) En remarquant que $x^2 g(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}e^{-x}$, montrer que `s` contient une valeur approchée de $\int_0^{+\infty} x^2 g(x)dx$, pour peu que l'on entre une valeur de n assez grande.

b) On admet que $E(X^4) = 3$. Quelle est la valeur exacte de l'intégrale dont il est question ci-dessus ?

Exercice 3

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.

Pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on note $\langle x, y\rangle$ le produit scalaire canonique de x et y.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et on rappelle que $\mathcal{B}$ est orthonormale pour le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$.

On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$, symétrique, dont les valeurs propres sont toutes strictement positives.

1) Justifier l'existence d'une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, ..., u_n)$, formée de vecteurs propres de f.

2) a) Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}^n$, on a : $\langle x, f(x)\rangle \geq 0$.

b) Vérifier que l'égalité $\langle x, f(x)\rangle = 0$ a lieu si et seulement si $x = 0$.

c) En déduire que l'application φ, de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, définie par $\varphi(x,y) = \langle x, f(y)\rangle$, est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

3) a) En utilisant $\mathcal{B}'$, montrer qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{R}^n$, symétrique pour le produit scalaire canonique, dont les valeurs propres sont strictement positives, et tel que $g^2 = f$.

b) Établir que g est bijectif.

c) Montrer que la famille $(g^{-1}(e_1), g^{-1}(e_2), ..., g^{-1}(e_n))$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire φ.

Problème

Partie 1

Dans cette partie, la lettre r désigne un entier naturel et x est un réel fixé de $]0,1[$.

1) Montrer que, lorsque n est au voisinage de $+\infty$, on a : $\binom{n}{r} \sim \dfrac{n^r}{r!}$.

2) a) Donner la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{r+2}x^n$.

b) En déduire que la série $\sum\limits_n \binom{n}{r} x^n$ est convergente.

3) Pour tout entier naturel r, on pose : $S_r = \sum\limits_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n$.

a) Donner la valeur de S_0.

b) Établir, en utilisant la formule du triangle de Pascal, que : $(1-x)S_{r+1} = xS_r$.

c) En déduire :

$$\forall x \in [0,1[,\ \forall r \in \mathbb{N},\ \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$$

d) Donner enfin la valeur de $\sum\limits_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r}$.

Partie 2

On désigne par α et p deux réels de $]0,1[$.

Un joueur participe à un jeu constitué d'une suite de manches.

Avant chaque manche, y compris la première, le joueur a une probabilité α de ne pas être autorisé à jouer la manche en question (on dit qu'il est disqualifié et c'est définitif), et une probabilité $1-\alpha$ d'y être autorisé, ceci indépendamment du fait qu'il ait gagné ou perdu la manche précédente s'il y en a eu une. À chaque manche jouée, le joueur gagne un euro avec la probabilité p et il perd un euro avec la probabilité $1-p$.

Tournez la page S.V.P.

Si le jeu a commencé, le joueur joue jusqu'à ce qu'il soit disqualifié et on suppose que les manches jouées sont jouées de façon indépendante.
On note :

- X le nombre de manches auxquelles a participé ce joueur avant d'être disqualifié.
- Y le nombre de manches gagnées par ce joueur.
- G le gain du joueur à la fin du jeu.

On admet que X, Y et G sont des variables aléatoires, définies toutes les trois sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1) a) Donner la loi de X (on pourra noter D_k l'événement « le joueur ne joue pas la $k^{\text{ème}}$ manche »).

b) On pose $T = X + 1$. Reconnaître la loi de la variable T puis en déduire que l'on a :

$$E(X) = \frac{1-\alpha}{\alpha}$$

c) En déduire également la valeur de $V(X)$.

2) a) Déterminer, pour tout entier naturel n, la loi de Y, conditionnellement à l'événement $(X = n)$.

b) En déduire, à l'aide de la partie 1, la loi de Y.

3) Calculer l'espérance de Y puis montrer que $V(Y) = \dfrac{p(1-\alpha)(p+\alpha-p\alpha)}{\alpha^2}$.

4) a) Exprimer G en fonction de X et Y.

b) En déduire l'espérance de G.

c) On admet l'existence de $E(XY)$. Établir que $E(XY) = \dfrac{p(1-\alpha)(2-\alpha)}{\alpha^2}$.

d) En déduire la variance de G.

5) a) Compléter, en utilisant la fonction `grand`, les commandes `Scilab` suivantes pour qu'elles simulent l'expérience aléatoire étudiée et affichent les valeurs prises par X et Y.

```
alpha = input('entrez la valeur de alpha :')
p = input('entrez la valeur de p :')
X = ------
Y = ------
disp(X)
disp(Y)
```

b) Quelles commandes faut-il ajouter aux précédentes pour que la valeur prise par G soit calculée et affichée ?

IMPRIMERIE NATIONALE – 15 1202 – D'après documents fournis

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2015

EDHEC 2015 VOIE S

CORRIGE

EXERCICE I

1)

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^n(x+1)}$ est continue sur $[1,+\infty[$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. L'intégrale I_n est impropre uniquement en $+\infty$. Pour tout $x \geq 1$, $\dfrac{1}{x^n(x+1)} \geq 0$ et $\dfrac{1}{x^n(x+1)} \underset{(x\to+\infty)}{\sim} \dfrac{1}{x^{n+1}}$. D'après le critère de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n+1}}dx$ converge car $n+1>1$. Par équivalence des fonctions continues positives,

$$\boxed{\text{l'intégrale } I_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n(x+1)}dx \text{ converge}}$$

2–a)

Pour $x \notin \{-1,0\}$, $\dfrac{a}{x} - \dfrac{b}{x+1} = \dfrac{(a-b)x+a}{x(x+1)}$.

$\dfrac{a}{x} - \dfrac{b}{x+1} = \dfrac{1}{x(x+1)} \iff a-b=0$ et $a=1 \iff a=b=1$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} - \{-1,0\},\ \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}$$

Remarque : on pouvait écrire directement $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{x+1-x}{x(x+1)} = \dfrac{x+1}{x(x+1)} - \dfrac{x}{x(x+1)}$.

2–b)

$$\begin{aligned} I_1 &= \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t(t+1)}dt = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)dt \\ &= \lim_{x\to+\infty} \Big[\ln|t| - \ln|t+1|\Big]_1^x = \lim_{x\to+\infty} \left(\ln\frac{x}{x+1} + \ln 2\right) \end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln\frac{x}{x+1} = \ln 1 = 0$ par continuité de la fonction ln au point 1, donc

$$\boxed{I_1 = \ln 2}$$

3–a)

$\forall x \geq 1$, $x+1 \geq 2$; donc $x^n(x+1) \geq 2x^n > 0$; la fonction inverse étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a : $0 < \dfrac{1}{x^n(x+1)} \leq \dfrac{1}{2x^n}$.

On intègre entre 1 et $+\infty$ (bornes dans l'ordre croissant) :

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n(x+1)}dx \leq \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n}dx. \qquad \textbf{(3a)}$$

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n}dx &= \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x^n}dx \\
&= \lim_{t\to+\infty} \left[-\frac{1}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}}\right]_1^t \\
&= \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-1}\frac{1}{t^{n-1}}\right) \\
&= \frac{1}{n-1} \qquad \text{car } n \geq 2, \text{ donc } n-1 \geq 1
\end{aligned}$$

L'inégalité (3a) s'écrit

$$\boxed{0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n(x+1)}dx \leq \frac{1}{2(n-1)}}$$

3–b)

Par encadrement

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$$

4–a)

$$\begin{aligned}
I_n + I_{n+1} &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n(x+1)}dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n+1}(x+1)}dx \\
&= \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^n(x+1)} + \frac{1}{x^{n+1}(x+1)}\right)dx \\
&\qquad \text{(linéarité de l'intégration des intégrales convergentes)} \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n+1}(x+1)}(x+1)dx \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n+1}}dx
\end{aligned}$$

D'après le calcul fait à la question 3), $\boxed{\forall n \geq 1,\ I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n}}$

4–b)

$$\begin{aligned}
I_n - I_{n+1} &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n(x+1)}dx - \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n+1}(x+1)}dx \\
&= \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^n(x+1)} - \frac{1}{x^{n+1}(x+1)}\right)dx \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^{n+1}(x+1)}dx
\end{aligned}$$

Or $x \geq 1 \Longrightarrow \frac{x-1}{x^{n+1}(x+1)} \geq 0$, donc $I_n - I_{n+1} \geq 0$ puisque les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant.

$$\boxed{\text{La suite } (I_n)_{n\geq 1} \text{ est décroissante}}$$

4–c)

$I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n}$; $I_{n+1} \leq I_n \Longrightarrow I_{n+1} + I_n \leq 2I_n$, par suite $I_n \geq \frac{1}{2n}$ d'après 4–a).

Compte tenu de la question 3–a), $\frac{1}{2n} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$; on multiplie par $2n > 0$ les trois termes de l'encadrement ;

$1 \leq 2nI_n \leq \frac{n}{n-1}$. En prenant la limite quand $n \to +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} 2nI_n = 1$.