Séries numériques

Table des matières

Voici quelques conseils pour bien utiliser ce cours :

- Les résultats numérotés tels que les **définitions, propositions, lemmes, corollaires et théorèmes** sont des résultats explicitement au programme et sont donc **à connaître parfaitement**.

- Les remarques, exemples et contre-exemples illustrent les résultats à connaître. Ils ne sont pas à connaître en tant que tel, mais ils évoquent souvent une méthode qu'il est bon de maitriser.

1 Convergence des séries numériques

Pour toute la suite, on se donne (u_n) une suite numérique (réelle ou complexe).

1.1 Sommes et restes

1.1.1 Définition : sommes partielles

On appelle *suite des sommes partielles* de (u_n) la suite (S_n) définie par $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} u_n}$.

1.1.2 Définition : somme de série et reste

On dit que la *série* $\sum u_n$ de *terme général* u_n converge (resp. diverge) si la suite de ses sommes partielles (S_n) converge dans $\mathbb{R}$ (resp. diverge).
Dans le cas de la convergence, la limite l de la suite (S_n) est appelé *somme de la série* (u_n) et elle est notée :

$$\boxed{l = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n}$$

Enfin, dans le cas de la convergence, on note $\boxed{R_n = l - S_n}$ appelé *reste d'ordre* n de la série $\sum u_n$ que l'on note aussi $\boxed{R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k}$.

Remarque

Savoir si une série est convergente ou divergente, c'est étudier la *nature* de la série. C'est en fait étudier la nature de la *suite* des sommes partielles.

Exemples

- Pour $u_n = 1$ pour tout n, $S_n = n + 1 \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$: la série n'est pas convergente.
- Pour $u_n = (-1)^n$ pour tout n, on a $S_n = 1$ pour n pair et $S_n = 0$ pour n impair et cette suite n'admet aucune limite : la série est divergente.
- Pour $u_n = e^{-n}$, $S_n = \dfrac{e^{-n-1} - 1}{e^{-1} - 1} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{1 - e^{-1}}$: la série est convergente et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} = \frac{1}{1 - e^{-1}}$.
  Il s'agit d'un cas particulier de la *série géométrique* que l'on reverra dans la suite.
- Soit x un réel quelconque. Selon l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction exponentielle à tout ordre n sur l'intervalle $[0, x]$ ou $[x, 0]$ selon le signe de x, on a :

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{\max(1, e^x)\, |x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Puisque $\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ pour $n \to +\infty$ et ceci quelque soit la valeur de x, on trouve que la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge avec $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$. Il s'agit de la *série exponentielle.*

Remarques

- Dans le cas d'une série $\sum u_n$ convergente, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.
- On peut éventuellement noter $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série numérique pour préciser où commence la sommation. Cela peut avoir une importance sur le calcul de la somme de la série. En revanche, la proposition qui suit montre que cela ne change pas la nature de la série.

1.1.3 Proposition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique et $n_0 \in \mathbb{N}$. Alors on a l'équivalence :

$$\sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ converge } \iff \sum_{n\geqslant n_0} u_n \text{ converge}$$

Ainsi, on ne change pas la nature d'une série en changeant un nombre fini de termes.

1.1.4 Proposition : combinaison linéaire de séries convergentes

Soient (u_n) et (v_n) des suites de séries convergentes. Alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, la série $\sum \lambda u_n + \mu v_n$ est convergente avec de plus :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n}$$

En particulier, l'ensemble $\mathcal{S}$ des suites de série convergente est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites et l'application $f : \begin{array}{c} \mathcal{S} \to \mathbb{K} \\ (u_n) \to \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \end{array}$ est une *forme linéaire* sur $\mathcal{S}$.

Remarque

Si on a deux suites telles que $\sum (u_n + v_n)$ est convergente, on n'est pas certain que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ soient convergente. On peut prendre $v_n = -u_n$ où $\sum u_n$ diverge pour s'en convaincre. C'est pour cela que l'on a supposé la convergence des séries dans la proposition précédente.

1.1.5 Proposition : séries à termes complexes

Soit (u_n) une suite complexe. On a : $\sum u_n$ converge $\Leftrightarrow \sum \Re(u_n)$ et $\sum \Im(u_n)$ convergent .

Dans le cas de la convergence, on a en plus $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \Re(u_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \Im(u_n)}$.

Exemple

Soit $\rho \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. La série à termes complexes $\sum(\rho e^{i\theta})^n$ est convergente de somme $\sum_{n=0}^{+\infty}(\rho e^{i\theta})^n = \dfrac{1}{1-\rho e^{i\theta}} = \dfrac{1-\rho e^{-i\theta}}{1+\rho^2-2\cos(\theta)\rho}$. Les séries des parties réelles et parties imaginaires sont donc convergentes avec :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\rho^n\cos(n\theta) = \frac{1-\rho\cos(\theta)}{1+\rho^2-2\cos(\theta)\rho} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\rho^n\sin(n\theta) = \frac{\rho\sin(\theta)}{1+\rho^2-2\cos(\theta)\rho}$$

1.2 Liens entre suites et séries

1.2.1 Proposition : condition NECESSAIRE de convergence

Si la série $\sum u_n$ converge, on a nécessairement $\lim u_n = 0$.
Si (u_n) ne tend pas vers 0, la série $\sum u_n$ est dite *grossièrement divergente*.

Exemple

Si $u_n = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$, alors $u_n = \exp\left(n\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right) \to e^{-1} \neq 0$ pour $n \to +\infty$ (après avoir effectué un développement limité). La série $\sum u_n$ est donc divergente en prenant la contraposée.

Remarques

- A l'occasion de cette proposition, faisons le lien $u_n = S_n - S_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ qui permet de la démontrer. On retrouvera cette idée lorsque l'on traitera les *séries télescopiques*.
- La réciproque de cette propriété est **FAUSSE** : $\lim u_n = 0$ ne suffit pas pour avoir le convergence de la série $\sum u_n$. On verra des contre-exemples.
- L'espace vectoriel des suites de série convergente est donc un sous-espace vectoriel (strict) de l'espace $\mathcal{C}_0(\mathbb{N})$ des suites de limite nulle.

Exemple important : la série harmonique

On considère ici la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ que l'on nomme *série harmonique*. Si l'on note toujours (S_n) la suite de ses sommes partielles, alors on a pour tout $n \geqslant 1$:

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{2n} = n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

De cette inégalité, on tire que $S_{2n} \geqslant S_n + \dfrac{1}{2}$ puis par une récurrence évidente on a $S_{2^n} \geqslant \dfrac{n}{2} \to +\infty$ pour $n \to +\infty$. On trouve donc une suite extraite de (S_n) qui diverge, la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ n'est donc pas convergente. Pourtant, son terme général tend vers 0.

1.2.2 Proposition : séries télescopiques

Pour toute suite (u_n), on a l'équivalence : (u_n) converge $\iff \sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.

De plus, en notant l la limite de (u_n) on a $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}(u_{n+1} - u_n) = l - u_0}$.

Exemple

La série $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ est une série divergente. En effet, on a $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)$ et $(\ln(n))$ n'est pas une suite convergente dans $\mathbb{R}$. Pourtant on voit encore une fois que le terme général de la série $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ tend vers 0.

Remarques

Les sommes télescopiques permettent de calculer des sommes de séries. C'est souvent possible lorsque u_n est une *fraction rationnelle* en n dont on déterminera la décomposition en éléments simples pour pouvoir faire apparaître le télescopage.

Exemple

Soit la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ et on sait donc la convergence de la série puisque $\frac{1}{n} \to 0$ avec en plus $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - 0 = 1$.

Remarque

Au delà d'un simple télescopage, il est possible d'obtenir des simplifications pour calculer des sommes partielles et donc l'éventuelle somme d'une série sur le même modèle que le télescopage. Il est fréquent d'écarter des termes des simplifications.

Exemple

Soit la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. Le terme général de cette série s'écrit encore comme une fraction rationnelle en n dont on peut donner la décomposition en éléments simples :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}$$

On pourrait avoir recours à un double télescopage, mais on peut directement obtenir la simplification en effectuant un *changement d'indice* dans les sommes partielles :