Convergence et sommes de séries : énoncés

Exercice 1

Calculer les sommes des séries suivantes dans le cas de leur convergence :

$$\text{a)} \quad \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n 3^{-n} \qquad \text{b)} \quad \sum_{n\geqslant 1}\frac{2-n}{n(n+1)(n+2)} \qquad \text{c)} \quad \sum_{n\geqslant 2}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 2

Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2-1}$ puis $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor-\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n}$

Exercice 3

On considère la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

1. Exprimer les sommes partielles de la série à l'aide de factorielles.
2. En utilisant la formule de Stirling, montrer la convergence et calculer la somme de la série.

Exercice 4

Soit (x_n) la suite définie par $x_0>0$ et $\forall n\in\mathbb{N}, x_{n+1}=x_n^2+x_n$.

1. Etudier la montonie et la convergence de (x_n).
2. Calculer $\dfrac{1}{x_{n+1}}-\dfrac{1}{x_n}$ puis en déduire la convergence et la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{1+x_n}$.

Exercice 5

Pour $x\neq\pm 1$, on pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $u_n=\dfrac{x^n}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$. En étudiant $(1-x)u_n$, étudier la convergence de $\sum u_n$ et le cas échéant calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$.

Exercice 6

1. En appliquant une formule de Taylor à $x\mapsto\ln(1+x)$, montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ et en calculer la somme.
2. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$.

Exercice 7

Pour $x \in \mathbb{R}$, déterminer dans le cas de la convergence les sommes $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Exercice 8

1. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tout $x \in \mathbb{R}$ la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.
2. En déduire pour quels x la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} nx^n$ converge et donner la somme de la série.
3. En écrivant $n = n+1-1$, retrouver le résultat précédent.
4. Calculer lors de sa convergence la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n$.

Exercice 9

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (-1)^n v_n$ et où $v_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt$ (*intégrale de Wallis*).

1. En déterminant une relation liant v_{n+2} et v_n, calculer v_n pour tout entier n.
2. Montrer la convergence de $\sum u_n$ puis exprimer la somme de la série au moyen d'une intégrale (que l'on tentera de calculer).

Exercice 10

$$\text{Pour tout entier } n \in \mathbb{N}, \text{ on pose } I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx.$$

1. Calculer I_0, I_1 et exprimer $I_n + I_{n+2}$ pour tout entier n.
2. En déduire l'expression de I_n au moyen de somme.
3. Montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et calculer sa somme.

   Retrouver également la convergence et la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Indications

Indications sur l'exercice 1

a) Reconnaître le terme général d'une série de référence.
b) Effectuer une décomposition en éléments simples du terme général.
c) Exprimer comme somme ou différence de ln le terme général.

Indications sur l'exercice 2

Pour la première somme, effectuer une décomposition en élément simple du terme général. Pour la deuxième somme, discuter de la différence $\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor$.

Indications sur l'exercice 3

1. Séparer dans un premier temps en deux sommes selon les termes pairs et impairs. Effectuer des regroupement de terme dans les ln pour n'en avoir plus qu'un à la fin.
2. La formule de Stirling est $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$.

Indications sur l'exercice 4

1. Il s'agit d'une suite récurrente. Etudier la différence $x_{n+1}-x_n$. Déterminer les éventuelles limites réelles de (x_n) selon la fonction qui définit cette suite.
2. Montrer que $\sum \frac{1}{1+x_n}$ est télescopique via le calcul proposé.

Indications sur l'exercice 5

Identifier $\sum(1-x)u_n$ comme une série télescopique. On distinguera les cas selon $|x|<1$ et $|x|>1$

Indications sur l'exercice 6

1. Pour avoir une égalité globale sur $[0,1]$, on pensera à la formule de Taylor avec reste intégral puis on montrera que le reste intégral tend vers 0 pour $n \to +\infty$.
2. Lier les sommes partielles de la série en question à celle précédemment trouvée.

Indications sur l'exercice 7

On rappelle selon un exemple que l'on a $\forall x \in \mathbb{R}, \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$. Les sommes en questions sont respectivement celles comportant les termes pairs et impairs de celle rappelée ici.

Indications sur l'exercice 8

1. Identifier la dérivée d'une fonction que l'on sait calculer.
2. On a l'expression des sommes partielles selon la première question : discuter de la convergence de celles-ci selon les valeurs de x.

3. Trouver une équation vérifiée par la somme de la série que l'on pourra résoudre pour retrouver l'expression.
4. On pourra dériver une seconde fois puis écrire $n^2 = n(n-1) + n$.

Indications sur l'exercice 9

1. Procéder à une intégration par partie. Pour envisager ensuite l'expression explicite, essayer sur les premiers rangs la relation de récurrence trouvée.
2. Exprimer les sommes partielles sous forme d'une seule intégrale $\in_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)$. Etudier la convergence de $f_n(t)$ pour $n \to +\infty$ selon les valeurs de t puis montrer qu'il en est de même pour l'intégrale. Pour le calcul de l'intégrale, penser au changement de variable $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$.

Indications sur l'exercice 10

1. Effectuer des simplifications lorsque $I_n + I_{n+2}$ est sous la forme d'une seule intégrale.
2. Essayer la relation de récurrence sur les premiers termes pour en déduire (par récurrence) une expression générale de I_n.
3. Faire le lien entre les sommes partielles et les intégrales et leurs limites.