

Convergence et sommes de séries : énoncés

Exercice 1

Calculer les sommes des séries suivantes dans le cas de leur convergence :

$$\text{a) } \sum_{n \geq 0} (-1)^n 3^{-n} \quad \text{b) } \sum_{n \geq 1} \frac{2-n}{n(n+1)(n+2)} \quad \text{c) } \sum_{n \geq 2} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

Exercice 2

Calculer la somme $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}$ puis $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor \sqrt{n+1} \rfloor - \lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n}$

Exercice 3

On considère la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$.

1. Exprimer les sommes partielles de la série à l'aide de factorielles.
2. En utilisant la formule de Stirling, montrer la convergence et calculer la somme de la série.

Exercice 4

Soit (x_n) la suite définie par $x_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n^2 + x_n$.

1. Etudier la monotonie et la convergence de (x_n) .
2. Calculer $\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}$ puis en déduire la convergence et la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+x_n}$.

Exercice 5

Pour $x \neq \pm 1$, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^* : u_n = \frac{x^n}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$. En étudiant $(1-x)u_n$,

étudier la convergence de $\sum u_n$ et le cas échéant calculer la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Exercice 6

1. En appliquant une formule de Taylor à $x \mapsto \ln(1+x)$, montrer la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ et en calculer la somme.

2. Calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$.



Exercices

Exercice 7

Pour $x \in \mathbb{R}$, déterminer dans le cas de la convergence les sommes $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Exercice 8

1. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tout $x \in \mathbb{R}$ la somme $\sum_{k=1}^n kx^{k-1}$.
2. En déduire pour quels x la série $\sum_{n \geq 1} nx^n$ converge et donner la somme de la série.
3. En écrivant $n = n + 1 - 1$, retrouver le résultat précédent.
4. Calculer lors de sa convergence la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n$.

Exercice 9

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (-1)^n v_n$ et où $v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$ (intégrale de Wallis).

1. En déterminant une relation liant v_{n+2} et v_n , calculer v_n pour tout entier n .
2. Montrer la convergence de $\sum u_n$ puis exprimer la somme de la série au moyen d'une intégrale (que l'on tentera de calculer).

Exercice 10

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$.

1. Calculer I_0, I_1 et exprimer $I_n + I_{n+2}$ pour tout entier n .
2. En déduire l'expression de I_n au moyen de somme.
3. Montrer la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et calculer sa somme.

Retrouver également la convergence et la somme de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Indications

Indications sur l'exercice 1

- Reconnaître le terme général d'une série de référence.
- Effectuer une décomposition en éléments simples du terme général.
- Exprimer comme somme ou différence de ln le terme général.

Indications sur l'exercice 2

Pour la première somme, effectuer une décomposition en élément simple du terme général. Pour la deuxième somme, discuter de la différence $\lfloor \sqrt{n+1} \rfloor - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

Indications sur l'exercice 3

- Séparer dans un premier temps en deux sommes selon les termes pairs et impairs. Effectuer des regroupement de terme dans les ln pour n'en avoir plus qu'un à la fin.
- La formule de Stirling est $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$.

Indications sur l'exercice 4

- Il s'agit d'une suite récurrente. Etudier la différence $x_{n+1} - x_n$. Déterminer les éventuelles limites réelles de (x_n) selon la fonction qui définit cette suite.
- Montrer que $\sum \frac{1}{1+x_n}$ est télescopique via le calcul proposé.

Indications sur l'exercice 5

Identifier $\sum (1-x)u_n$ comme une série télescopique. On distinguera les cas selon $|x| < 1$ et $|x| > 1$

Indications sur l'exercice 6

- Pour avoir une égalité globale sur $[0, 1]$, on pensera à la formule de Taylor avec reste intégral puis on montrera que le reste intégral tend vers 0 pour $n \rightarrow +\infty$.
- Lier les sommes partielles de la série en question à celle précédemment trouvée.

Indications sur l'exercice 7

On rappelle selon un exemple que l'on a $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$. Les sommes en questions sont respectivement celles comportant les termes pairs et impairs de celle rappelée ici.

Indications sur l'exercice 8

- Identifier la dérivée d'une fonction que l'on sait calculer.
- On a l'expression des sommes partielles selon la première question : discuter de la convergence de celles-ci selon les valeurs de x .

**Indications**

3. Trouver une équation vérifiée par la somme de la série que l'on pourra résoudre pour retrouver l'expression.
4. On pourra dériver une seconde fois puis écrire $n^2 = n(n-1) + n$.

Indications sur l'exercice 9

1. Procéder à une intégration par partie. Pour envisager ensuite l'expression explicite, essayer sur les premiers rangs la relation de récurrence trouvée.
2. Exprimer les sommes partielles sous forme d'une seule intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)$. Etudier la convergence de $f_n(t)$ pour $n \rightarrow +\infty$ selon les valeurs de t puis montrer qu'il en est de même pour l'intégrale. Pour le calcul de l'intégrale, penser au changement de variable $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$.

Indications sur l'exercice 10

1. Effectuer des simplifications lorsque $I_n + I_{n+2}$ est sous la forme d'une seule intégrale.
2. Essayer la relation de récurrence sur les premiers termes pour en déduire (par récurrence) une expression générale de I_n .
3. Faire le lien entre les sommes partielles et les intégrales et leurs limites.