Séries à termes positifs

Exercice 1

Soit (u_n) une suite à termes positifs et soit pour tout entier n : $v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exercice 2

Soit (u_n) une suite à termes positifs et soit pour tout entier n : $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exercice 3

Soit (u_n) une suite à termes positifs et décroissante telle que $\sum u_n$ converge.

1. A l'aide des restes de la série, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$.
2. Déterminer alors la nature de la série $\sum nu_n^2$.

Exercice 4

Déterminer la nature des séries suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n\cos^2(n)}$ c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^{n^2}$, $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ d) $\displaystyle\sum \frac{\mathrm{ch}(n)}{\mathrm{ch}(2n)}$

e) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}}$ f) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^n}{(2n)!}$ g) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \sin(2\arctan(n))$ h) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{1+2+\ldots+n}$

Exercice 5

On considère les séries de terme général $\forall n \geqslant 2, u_n = \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (*séries de Bertrand*)

1. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ pour $\alpha > 1$ et $\alpha < 1$.
2. Pour $\alpha = 1$, déterminer selon β la nature de $\sum u_n$ en procédant à une comparaison série intégrale.

Exercice 6

Soit $\alpha > 1$. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ (*On pensera à faire une comparaison série intégrale pour avoir un équivalent*).

Exercice 7

Sans utiliser la formule de Stirling, montrer la convergence de la suite $u_n = \dfrac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!e^n}$ (*on pourra étudier la suite* $(\ln(u_n))$).

Exercice 8

Soit $\alpha > 0$. On pose alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\ln(k))^\alpha$.

1. Montrer que $u_n \sim n(\ln(n))^\alpha$.
2. Pour $\beta \in \mathbb{R}$, étudier la série $\sum u_n^{-\beta}$

Exercice 9

Soit (u_n) une suite à termes positifs telle que $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers $l \in [0, +\infty]$.

1. On suppose que $l < 1$ et on se donne alors $q \in]l, 1[$. Montrer que $u_n = O(q^n)$ et en déduire la nature de $\sum u_n$.
2. On suppose que $l > 1$. Montrer que si $l > 1$ alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.
3. Montrer que la divergence grossière persiste si $l = 1^+$ (limite obtenue par valeurs supérieures).
4. Montrer que si $l = 1$, on ne peut pas conclure sur $\sum u_n$ en toute généralité.

La distinction de cas ainsi obtenue est connue sous le nom de *règle de Cauchy*.

Exercice 10

Soit (u_n) une suite strictement croissante à termes strictement positifs et soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n}$$

1. Justifier que (u_n) admet une limite $l \in [0, +\infty]$.
2. Montrer que si $l \in \mathbb{R}$, alors $\sum v_n$ converge.
3. Montrer que si $l = +\infty$ alors $\sum v_n$ diverge par une comparaison à $\sum \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.

Exercice 11

Soit $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une bijection. Etudier la nature de la série $\sum \frac{1}{n\varphi(n)}$.

Indications sur les exercices

Indications sur l'exercice 1

- Si $\sum u_n$ converge, on peut exprimer les sommes partielles de $\sum v_n$ à l'aide de celles de $\sum u_n$ pour prouver leur convergence.
- Si $\sum v_n$ converge, on peut majorer le terme général u_n.

Indications sur l'exercice 2

- Si $\sum u_n$ converge, on peut trouver un équivalent de v_n pour conclure.
- Si $\sum v_n$ converge, on peut procéder de façon identique (il faut ré-exprimer u_n).

Indications sur l'exercice 3

1. Procéder à un encadrement de nu_n par des restes de la série. Utiliser la décroissance de (u_n).
2. On peut comparer le terme général nu_n^2 à u_n.

Indications sur l'exercice 4

a) Comparer le terme général à celui d'une série de Riemann.
b) Comparer le terme général à celui d'une série de Riemann.
c) Effectuer un développement asymptotique afin de trouver un équivalent simple du terme général.
d) Trouver un équivalent simple du terme général.
e) Comparer le terme général à celui d'une série de Riemann.
f) Trouver un équivalent simple à l'aide de la formule de Striling.
g) On rappelle (et on démontrera) que $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x > 0$.
h) Un simple calcul du dénominateur mène au résultat.

Indications sur l'exercice 5

1. Des comparaisons du terme général à celui d'une série de Riemann suffit ici.
2. Etudier la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t(\ln(t)^\beta)}$ pour faire comparaison série intégrale.

Indications sur l'exercice 6

La comparaison série intégrale doit donner un équivalent simple de u_n. On peut alors conclure.

Indications sur l'exercice 7

Pour étudier la suite $(\ln(u_n))$, on peut étudier la série $\sum(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ en utilisant un développement asymptotique de son terme général.

Indications sur l'exercice 8

1. Il faut procéder à une comparaison série integrale. Une fois qu'on a prouvé que u_n était équivalent à une intégrale en n, on peut trouver un équivalent de cette dernière en procédant à une intégration par partie.
2. Il suffit d'utiliser l'équivalent précédent pour conclure. On aura recours aux *séries de Bertrand* pour pouvoir conclure.

Indications sur l'exercice 9

1. Exprimer limite l en interprétant que le terme est inférieur à q à partir d'un certain rang.
2. Etudier dans ce cas le sens de variation de la suite (u_n).
3. Etudier encore le sens de variation de la suite (u_n).
4. Trouver deux exemples de suites menant à $l = 1$ avec l'une dont la série diverge et l'autre dont la série converge.

Indications sur l'exercice 10

1. C'est un résultat classique sur les suites monotones dont il faut se servir...
2. On trouve un équivalent simple de v_n qui permet de conclure.
3. Pour obtenir la comparaison souhaitée, il faut comparer v_n à une intégrale bien choisie.

Indications sur l'exercice 11

Il faut séparer le terme général de la série en le majorant à l'aide de la majoration classique (que l'on démontrera) $|ab| \leqslant \dfrac{a^2 + b^2}{2}$. On peut également faire appel à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.