Développement décimal des nombres réels

Table des matières

Voici quelques conseils pour bien utiliser ce cours :

- Les résultats numérotés tels que les **définitions, propositions, lemmes, corollaires et théorèmes** sont des résultats explicitement au programme et sont donc **à connaître parfaitement**.
- Les remarques, exemples et contre-exemples illustrent les résultats à connaître. Ils ne sont pas à connaître en tant que tel, mais ils évoquent souvent une méthode qu'il est bon de maitriser.

L'ensemble des résultats ici à connaître est suivi d'un approfondissement qu'il est bon de voir et de mettre en lien avec le cours d'informatique sur l'écriture des nombres dans une certaine base de numération.

Enfin, on propose quelques exercices, essentiellement pour montrer l'intérêt de considérer de telles écritures des nombres.

1 Développement décimal

Soit x un réel quelconque. Le but de ce qui suit est de donner une définition rigoureuse de l'écriture décimale (éventuellement illimitée) de $x = m, a_1 a_2 ... a_n ...$ où donc $m \in \mathbb{Z}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans $[\![0,9]\!]$ (suite des *décimales*).

1.1 Introduction

On tente de donner un sens à l'écriture d'un nombre dont les décimales seraient toutes égales à 9 une infinité comme $x = 0,99999.....$

Si un tel nombre devait exister, il serait en particulier la limite de la suite (x_n) où $x_n = 0,9...9$ où 9 apparaît exactement n fois après la virgule. Ce nombre s'écrit formellement $x_n = \sum_{k=1}^{n} 9 \times 10^{-n}$.

La convergence de la suite (x_n) revient donc à étudier la convergence de la *série* $\sum 9 \times 10^{-n}$. Cette série est bien sûr convergente puisqu'elle est géométrique de raison $10^{-1} \in]0,1[$. La limite de la suite est donc la somme de la série à savoir :

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} 9 \times 10^{-n} = 9 \times \frac{10^{-1}}{1-10^{-1}} = 1$$

Si donc l'écriture $0,99999...$ (une infinité de fois) a un sens, elle vérifie donc :

$$0,99999... = 1\,!!!$$

Cette égalité bien surprenante (mais pourtant exacte !) montre qu'il faut prendre garde à ce que l'on voudra appeler écriture décimale et même *développement décimal* qu'une suite infini de 9 peut compromettre l'*unicité* de cette écriture.

1.2 Développement décimal propre

1.2.1 Définition : développement décimal

Pour $x \in \mathbb{R}$, on appelle *développement décimal* de x toute écriture de la forme $x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n 10^{-n}$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \in [\![0,9]\!]$.

Exemples

- $\frac{1}{8} = 0,125$ admet un développement décimal avec $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 5$ et $\forall n \geqslant 4, a_n = 0$. Mais il en existe un autre sous la forme $0,12499999...$ avec une infinité de 9 sur le même modèle qu'en introduction.
- $\frac{1}{3} = 0,33333...$ admet un développement décimal avec $a_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = 3$. Il n'est pas possible d'en donner d'autre. On l'expliquera ultérieurement.

- π admet un développement décimal dont la suite des décimales n'est pas entièrement connue. On peut citer $a_0 = 3$, $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 1$, $a_4 = 5$, $a_5 = 9$...

Rappel

On dit qu'une suite (u_n) est *stationnaire* en $l \in \mathbb{R}$ s'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$ on ait $u_n = l$. Sa négation est que pour tout entier n, il existe $N \geqslant n$ tel que $u_N \neq l$.

1.2.2 Théorème/définition : développement décimal propre

Soit $x = \sum_{n=0} a_n 10^{-n} = \sum_{n=0} b_n 10^{-n}$ deux développement décimaux d'un même nombre réel x. Si les suites (a_n) et (b_n) ne sont pas *stationnaires* en 9, alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_n = b_n$. L'unique développement ainsi défini s'appelle *développement décimal propre* de x et la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ s'appelle *suite des décimales de x*.

Remarques

- Pour le développement décimal propre, on a plus peut donner la suite (a_n) par :

$$a_0 = \lfloor x \rfloor \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = 10^n \left(x - \sum_{k=0}^{n} a_k 10^{-k} \right)$$

- La suite est donnée par la *division euclidienne classique* pratiquée avec des décimales lorsqu'il s'agit d'un nombre rationnel.
- Les nombres dont les développements décimaux sont constitués de suites stationnaire en 0 sont exactement les *nombres décimaux*.

2 Approfondissements

2.1 Développements en autres bases

Cette sous-partie est hors programme de première année de CPGE mais elle peut être mise en lien avec l'écriture des entiers naturels dans une base $b \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Pour toute cette sous-partie, on note b un tel nombre.

Définition : développement en base b

Pour $x \in \mathbb{R}$, on appelle *développement en base b* de x toute écriture de la forme $x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b^{-n}$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \in [\![0, b-1]\!]$.

Exemples

- On a $\sum_{n=2}^{+\infty} 2^{-n} = \frac{1}{2}$. Il s'agit d'un développement *dyadique* de $\frac{1}{2}$. Cependant, on peut aussi écrire $\frac{1}{2} = 2^{-1}$ qui constitue un autre développement dyadique de $\frac{1}{2}$
- La décomposition *triadique* d'un réel comporte à partir du rang $n = 1$ comporte des termes $a_n = 1$ ou $a_n = 2$. On a par exemple $\sum_{n=1}^{+\infty} 3^{-n} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$

Remarque

On peut voir sur les exemples que telles que donnée, la définition n'assure pas l'unicité d'un tel développement en base b. Comme pour le développement décimal, on impose une condition similaire.

Théorème/définition : développement propre en base b

Soit $x = \sum_{n=0} a_n b^{-n} = \sum_{n=0} c_n b^{-n}$ deux développement en base b d'un même nombre réel x. Si les suites (a_n) et (b_n) ne sont pas *stationnaires* en $b-1$, alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_n = b_n$.
L'unique développement ainsi défini s'appelle *développement propre en base* b de x et la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exemple

Le développement dyadique propre de $\frac{1}{2}$ est 1×2^{-1}.

2.2 Exercices d'application et d'approfondissement

Exercice 1

Calculer les nombres réels dont le développement décimal propre est donné par la suite (a_n) :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 5$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, a_{3n} = 1, a_{3n+1} = 2, a_{3n+2} = 3$.

Exercice 2

Déterminer les développements décimaux propres des nombres suivants :

$$a)\ \frac{4}{7} \qquad b)\ \frac{19806271}{111111111}$$