Problème

On dit qu'un ensemble E est *dénombrable* s'il existe une surjection f de l'ensemble $\mathbb{N}$ dans E $f: \begin{array}{l} \mathbb{N} \to E \\ n \mapsto f(n) = a_n \end{array}$. Cela revient à pouvoir numéroter tous les éléments de E.

Le but du problème est de donner des propriétés sur les ensembles dénombrables (opérations, effet d'un application...) qui vont permettre par la suite de traiter de nombreux ensembles usuels. On conclut par d'autres exemples moins usuels qui serviront d'approfondissement.

Il est à noter que la notion de dénombrabilité fait partie du programme de deuxième année, en introduction des probabilités sur des univers infinis.

1. Démontrer que tout ensemble E fini de cardinal $m \in \mathbb{N}$ est dénombrable.
2. Si E est dénombrable et que F est une partie de E, que dire de F ?
3. Montrer que si E est dénombrable et qu'il existe une surjection $\varphi : E \to F$, alors F est dénombrable.
4. On considère l'application g de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ défini par $g(p, q) = 2^p(2q + 1) - 1$.
   (a) Calculer $g(p, q)$ pour $p, q \in [\![0, 3]\!]$.
   (b) Que dire des nombres $g(0, q)$ et des nombres $g(p, q)$ pour $p \geqslant 1$?
   (c) Montrer que tout entier n admet un unique couple antécédent par g dans $\mathbb{N}^2$.
   (d) En déduire que $\mathbb{N}^2$ est un ensemble dénombrable.
5. Montrer que les ensemble $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.
6. On considère une famille de parties $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toutes dénombrables. Montrer que leur réunion $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est encore dénombrable.
7. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\mathbb{N}^n$ est dénombrable.
8. On considère $E_1, ..., E_n$ des ensembles tous dénombrables. Montrer que leur produit cartésien $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} E_k$ est dénombrable.
9. *Théorème de Cantor* : Démontrer que pour tout ensemble F, il n'existe pas de surjection de F dans $\mathcal{P}(F)$. On pourra considérer $A = \{x \in E / x \notin \varphi(x)\}$.
10. Montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.
11. On considère $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$. Démontrer que $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ est dénombrable. Que dire de l'ensemble des parties infinies de $\mathbb{N}$?

12. On écrit tout nombre de l'intervalle $]0,1[$ sous la forme $x = 0, d_1 d_2 d_3 ...$ (écriture décimale illimitée). Montrer qu'il n'existe pas de surjection $\psi : \mathbb{N} \to]0,1[$. Conclure sur la dénombrabilité ou non de $]0,1[$, puis sur celle de $\mathbb{R}$.

13. Les ensembles suivants sont-ils dénombrables ? On justifiera en s'aidant de ce qui précède :

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \qquad \mathbb{C} \qquad \mathbb{D} \qquad E^{\mathbb{N}}, E \text{ quelconque} \qquad \mathbb{Q}[X] \qquad \mathbb{A}$$

$\mathbb{A} \subset \mathbb{C}$ *désigne l'ensemble des nombres algébriques, c'est à dire ceux qui sont racines d'un polynômes à coefficients rationnels comme* $\sqrt{n}$ *pour* $n \in \mathbb{N}$, *les complexes i,j ou plus généralement les racines n-ième de l'unité etc. Les nombres qui ne sont pas algébriques comme* π, *e sont dits transcendants*

Remarques et ouvertures Il est possible de parler de cardinal d'un ensemble quelconque. On dit que deux ensembles E et F ont *même cardinal* s'il existe une bijection $f : E \to F$ (on dit aussi qu'ils sont *équipotents*) que l'on note $\text{card}(E) = \text{card}(F)$. Cela crée une relation d'équivalence sur les ensembles.
S'il existe une injection de E dans F, on note $\text{card}(E) \leqslant \text{card}(F)$ et s'il n'existe pas de bijection dans un tel cas on note $\text{card}(E) < \text{card}(F)$.

La classe d'équivalence de $\mathbb{N}$ est constituée des ensembles infinis dénombrables. Les ensembles finis sont classifiés via leur cardinal au sens premier du terme, à savoir leur nombre d'éléments.

On peut prouver que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathbb{R}$ ont même cardinal. La classe d'équivalence de $\mathbb{R}$ est constituée des ensembles dont on dit qu'ils ont la *puissance du continu*.

Fait remarquable en mathématique l'assertion suivante appelée *hypothèse du continu* :

$$\text{Il n'existe pas d'ensemble } E \text{ tel que } \text{card}(\mathbb{N}) < \text{card}(E) < \text{card}(\mathbb{R})$$

est indécidable, c'est à dire qu'on ne peut la décréter vraie ou fausse avec le système d'axiomes donnés au départ définissant la théorie des ensembles et donc les mathématiques que l'on connait (c'est le cas aussi de l'*axiome du choix*, mais lui est considéré comme faisant partie de l'axiomatique de départ en adjonction des autres).