SUITES NUMERIQUES

Problèmes

Dans ce recueil, on présente quatre problèmes portant sur le développement asymptotique de suites numériques définies implicitement.

Notamment, il s'agit d'étudier (x_n) telle que le terme x_n soit l'unique solution d'une équation $f_n(x) = 0$ sur un intervalle I_n.

Le dernier problème, voulant faire la synthèse des techniques utilisées, est volontairement posé de manière ouverte.

Problème 1

On considère ici l'équation $(E) : \tan(x) = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Réaliser l'étude complète de $\varphi : x \mapsto \tan(x) - x$ sur l'intervalle $I_n = \left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$.
   (b) En déduire que (E) admet une unique solution dans I_n. On note x_n cette solution.
   (c) Démontrer que l'on a $x_n - n\pi = \arctan(x_n)$.

2. *Un équivalent de x_n à l'infini.*
   (a) Avec un encadrement de x_n, démontrer que $x_n \sim n\pi$.
   (b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n - n\pi = \frac{\pi}{2}$.

   On écrit donc $(R) : x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.

3. *Un développement asymptotique de x_n.*
   (a) Justifier que pour tout $y \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, on a $\tan\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \frac{1}{\tan(y)}$.
   (b) Donner un équivalent simple de tan à l'origine puis utilisant (E) et (R), démontrer que $\alpha_n \sim -\frac{1}{n\pi}$.

   On écrit donc $(R') : x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{\varepsilon_n}{n}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.

4. *Un développement asymptotique de x_n encore plus précis.*
   (a) Rappeler le développement limité de tan à l'ordre 3 à l'origine, puis montrer que $\frac{1}{\tan(x)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} + o(x)$.
   (b) En utilisant alors (E) et (R'), démontrer que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 9 pages.

Problème 2

On note pour tout entier $n \geqslant 3$ la fonction $f_n : x \mapsto x - n\ln(x)$ définie sur $]0, +\infty[$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0, 2[$ pour tout $n \geqslant 3$. On notera a_n cette solution.
2. (a) En comparant $f_n(a_n)$ et $f_n(a_{n-1})$, montrer que (a_n) est décroissante.
   (b) Montrer que la suite (a_n) tend vers 1.
3. Calculer le développement limité à l'ordre 2 de $\varphi : t \mapsto \dfrac{\ln(1+t)}{1+t}$ en 0.
4. On écrit $a_n = 1 + u_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
   (a) Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ que l'on déterminera tel que $u_n \sim \dfrac{A}{n}$. On écrit alors $a_n = 1 + \dfrac{A}{n} + \dfrac{v_n}{n}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.
   (b) Déterminer un équivalent de v_n et conclure sur un développement asymptotique à trois termes de a_n.

Problème 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : x \mapsto x^n - nx + 1$.

1. Montrer que f_n s'annule une seule fois sur $]0, 1[$. On note x_n l'abscisse d'annulation.
2. En étudiant le signe de $f_{n+1}(x_n)$, montrer que (x_n) est décroissante et étudier sa convergence.
3. Déterminer un équivalent simple de x_n pour $n \to +\infty$ puis un développement asymptotique à deux termes.

Problème 4

Soit $f : x \mapsto x - \ln(x)$ définie sur $]0, +\infty[$.

Montrer l'existence et l'unicité de deux suites (x_n) et (y_n) définies par $f(x) = n$ respectivement sur $[1, +\infty[$ et $]0, 1]$.

Etudier la convergence des suites (x_n) et (y_n) puis des développements asymptotiques (choisissez vous-même le nombre de termes de ce développement, mais de voyez pas trop gros au début !).

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 9 pages.

Indications sur les problèmes

Indications sur le problème 1

1. (a) La dérivée est simple à obtenir. Ne pas oublier les limites aux bornes (dictées par tan).

   (b) Utiliser le théorème de la bijection.

   (c) En prenant garde à l'intervalle sur lequel on travaille, étudier les tangentes des deux membres.

2. (a) Utiliser l'intervalle I_n dans lequel se trouve x_n.

   (b) On trouve la première limite par l'équivalent. Pour $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n - n\pi = \dfrac{\pi}{2}$, utiliser une autre expression de $x_n - n\pi$.

3. (a) Utiliser les relations trigonométriques pour $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - y\right) = \ldots$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - y\right) = \ldots$.

   (b) Utiliser dans un premier temps un développement limité à l'ordre 1 de tan. Puisque $\alpha_n \to 0$, on pourra utiliser un équivalent de $\tan(\alpha_n)$ pour $n \to +\infty$.

4. (a) Avec le développement de tan à l'ordre 3, factoriser le dénominateur par x pour avoir une expression $\dfrac{1}{1-X}$ où $X \to 0$.

   (b) Développer l'expression issue de (R') dans (E) en l'effectuant pour une suite tendant vers 0. On doit pourvoir isoler ϵ_n.

Indications sur le problème 2

On note pour tout entier $n \geqslant 3$ la fonction $f_n : x \mapsto x - n\ln(x)$ définie sur $]0, +\infty[$.

1. Etudier l'application f_n sur $]0, 2[$.

2. (a) On pourra étudier la différence des deux expressions avec $f_n(a_n) = 0$. On devra alors utiliser le sens de variation de la fonction f_n pour pouvoir avoir $a_{n-1} \leqslant a_n$.

   (b) S'assurer déjà que la suite (a_n) est convergente. En supposant que $a_n \to l \neq 1$, obtenir une contradiction.

3. Développer chaque facteur au bon ordre puis en faire le produit.

4. (a) Donner un équivalent de $\dfrac{\ln(1+u_n)}{1+u_n}$ par ce qui précède puis se ramener à u_n.

   (b) Pour l'équivalent de v_n, on utilisera le développement limité de la fonction φ.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 9 pages.