Problème

1. Soit α et β deux nombres réels positifs, $\beta \neq 0$.
   (a) On pose $n = \left\lfloor \frac{\alpha}{\beta} \right\rfloor$. Montrer que $\alpha - n\beta \in [0, \beta[$.
   (b) Démontrer qu'il existe un unique couple $(n, \rho) \in \mathbb{N} \times [0, \beta[$ tel que $\alpha = n\beta + \rho$.

2. Pour toute la suite, $G \neq \{0\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. On note $a = \inf(G \cap]0, +\infty[)$.
   (a) Justifier l'existence de $a \in]0, +\infty[$. Le donner dans le cas $G = \mathbb{Q}$, $G = \mathbb{D}$ et enfin $G = \mathbb{Z}$ (justifier...).
   (b) Dans le cas où $a > 0$, démontrer que l'on $G = \{na / n \in \mathbb{Z}\} = a\mathbb{Z}$.
   (c) Dans le cas où $a = 0$, démontrer que G est dense dans $\mathbb{R}$. (*Indication : pour tous réels $a < b$, choisir $g \in G$ tel que $0 < g < b - a$... on pourra faire un dessin !*).

3. On note toujours exp la fonction exponentielle réelle.
   (a) Démontrer que $\exp(G)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^{+*}, \times)$.
   (b) Réciproquement, démontrer que si H est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^{+*}, \times)$, alors $\overset{-1}{\exp}(H)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
   (c) En déduire la description des sous-groupes de $(\mathbb{R}^{+*}, \times)$.

   Pour toute la suite, si x et y sont deux réels, on note $\mathbb{Z}[x, y] = \{nx + my / (n, m) \in \mathbb{Z}^2\}$

4. Justifier que $\mathbb{Z}[x, y]$ est bien un sous-groupe de $\mathbb{R}$.
5. On suppose dans cette question que le quotient $\frac{x}{y} = \frac{p}{q}$ est rationnel avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ où p et q sont premiers entre eux.
   (a) Si $a = \frac{x}{p} = \frac{y}{q}$, montrer que $\mathbb{Z}[x, y] \subset a\mathbb{Z}$.
   (b) En utilisant l'identité de Bezout, montrer qu'on a bien $\mathbb{Z}[x, y] = a\mathbb{Z}$.
   (c) Application : identifier le sous-groupe $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right]$.
6. On suppose que $\frac{x}{y}$ est irrationnel. Montrer que $\mathbb{Z}[x, y]$ est dense dans $\mathbb{R}$.
7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui est à la fois T et T' périodique.
   (a) Montrer que si $\frac{T}{T'}$ est rationnel, alors il existe $P \in \mathbb{R}^*$ (à déterminer) pour lequel la condition équivaut au fait que f soit P-périodique.
   (b) Dans le cas contraire, montrer que f est constante.
8. Soit α un irrationnel. Montrer que l'ensemble $\{m\alpha - \lfloor m\alpha \rfloor / m \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0, 1]$. On pourra considérer le sous-groupe $\mathbb{Z}[\alpha, -1]$.
9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et T-périodique.
   (a) Montrer que si $\frac{\alpha}{T}$ est irrationnel, alors l'ensemble $\{f(m\alpha) / m \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $f(\mathbb{R})$.
   (b) Si r est rationnel, que dire des suites $(\cos(rn))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sin(rn))_{n\in\mathbb{N}}$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.

Indications

1. (a) La partie entière est définie par une inégalité qu'il faut utiliser ici.
   (b) La question précédente donne un couple. Pour l'unicité, si ρ et ρ_1 conviennent, utiliser le fait que $\rho - \rho_1 \in]-\beta, \beta[$.

2. (a) Une borne inférieure existe si et seulement si la partie est minorée. Etudier alors $G \cap]0, +\infty[$ dans les exemples proposés.
   (b) On montre facilement que $a\mathbb{Z} \subset G$. Pour la réciproque, prendre un élément $x \in G$ et en faire la division euclidienne réelle par a.
   (c) Si $]a, b[\neq \emptyset$, alors $b - a > 0$ et il doit exister $g < b - a$ et $g \in G$. On devra essayer d'intercaler un multiple de G dans l'intervalle $]a, b[$.

3. (a) Vérification facile avec la caractérisation des sous-groupes multiplicatifs.
   (b) Puisque exp est bijective, on peut exprimer facilement $\overline{\exp}^{-1}(H)$.
   (c) On utilisera la description des sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$ pour avoir celle des sous-groupes de $(\mathbb{R}^{+*}, \times)$.

4. Vérification facile avec la caractérisation des sous-groupes additifs.

5. (a) Vérification facile avec la forme des éléments de $\mathbb{Z}[x, y]$.
   (b) Commencer par montrer que $a \in \mathbb{Z}[x, y]$. Le reste vient ensuite.
   (c) On doit commencer par identifier a ici.

6. Par disjonction de cas, on peut montrer que $\mathbb{Z}[x, y]$ ne peut pas s'écrire sous la forme $a\mathbb{Z}$.

7. (a) Commencer par montrer que f est constante sur le sous-groupe $\mathbb{Z}[T, T']$. Dans ce cas, on a l'existence de P tel que $\mathbb{Z}[T, T'] = P\mathbb{Z}$.Montrer que si $\dfrac{T}{T'}$ est rationnel, alors il existe $P \in \mathbb{R}^*$ (à déterminer) tel que f est P-périodique.
   (b) f est constante sur le sous-groupe $\mathbb{Z}[T, T']$, qui est ici dense. Utiliser ensuite la continuité de f.

8. Si $]a, b[\subset [0, 1]$ est non vide, il contient un élément de $\mathbb{Z}[\alpha, -1]$. Utiliser cet élément pour montrer qu'il est de la forme de l'ensemble considéré ici.

9. (a) Utiliser le résultat précédent.
   (b) Simple application aux fonctions cos et sin.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.