BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 283

Conception : HEC Paris – ESCP Europe

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES II

Mercredi 4 mai 2016, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

La simulation de vecteurs aléatoires dont les composantes ne sont pas indépendantes intervient dans l'évaluation de risques cumulés dans des domaines tels que l'assurance, la finance, la médecine ou l'écologie.
On résume les liaisons entre les composantes à l'aide de fonctions de plusieurs variables appelées copules.
L'objet du problème consiste à présenter cette notion de copule dans le cadre de la simulation d'un vecteur aléatoire à deux composantes.

On suppose que toutes les variables aléatoires et tous les vecteurs aléatoires qui interviennent dans ce problème sont définis sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On rappelle que la loi d'un vecteur aléatoire (X, Y) à valeurs dans $\mathbf{R}^2$ est caractérisée par la fonction $F_{(X,Y)}$ définie sur $\mathbf{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ F_{(X,Y)}(x,y) = P\big([X \leqslant x] \cap [Y \leqslant y]\big)$. On dit que $F_{(X,Y)}$ est la *fonction de répartition conjointe* de X et Y.

Partie I. Simulation d'une variable aléatoire à densité.

1.a) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\,(1+x)}$.

b) Soit V une variable aléatoire telle que $V(\Omega) = [\,0, \pi/2\,[$ suivant la loi uniforme sur $[\,0, \pi/2\,[$.
On pose : $X = \tan^2(V)$. Montrer que X est une variable aléatoire à densité.

c) En déduire que la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{x}\,(1+x)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de probabilité.

2.a) Compléter le code *Scilab* de la fonction `simulX` suivante de sorte que son application à l'entier N $(N \geqslant 2)$ fournisse une matrice colonne contenant N simulations indépendantes de la variable aléatoire X.

```
function x=simulX(N)
  u=rand(...,...) ;
  x=ones(u) ; // matrice de même format que u.
  for i=1:N
    x(i,1)= ......
  end ;
endfunction
```

Tournez la page S.V.P.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 16 pages.

b) Après avoir affecté une valeur entière supérieure ou égale à 2 à la variable N, on exécute les commandes suivantes :

```
x=simulX(N) ;
y=0 ;
for i=1:N if x(i,1)>1 then y=y+1 ; end ; end ;
q=y/N ;
```

Trouver la loi d'une variable aléatoire dont la valeur de y est, en fin de boucle, une simulation.
De quel nombre peut-on s'attendre que q soit proche lorsque la valeur affectée à N est grande et pourquoi ?

3. Soit X une variable aléatoire à densité dont la fonction de répartition est notée F_X.
Soit p un réel de $]0,1[$. On pose : $K_p = \{x \in \mathbf{R};\ F_X(x) = p\}$ et $J_p = \{x \in \mathbf{R};\ F_X(x) < p\}$.

a) Justifier que les deux ensembles J_p et K_p ne sont pas vides et montrer que si $a \in J_p$ et $b \in K_p$, on a nécessairement : $a < b$.

b) On pose : $G_X(p) = \inf(K_p)$. Justifier l'existence de $G_X(p)$ et établir l'égalité : $F_X\big(G_X(p)\big) = p$.

c) En déduire pour tout x réel, l'équivalence : $x < G_X(p) \iff F_X(x) < p$.

d) Soit U une variable aléatoire telle que $U(\Omega) =]0,1[$ et qui suit la loi uniforme sur $]0,1[$.
Montrer que la variable aléatoire $G_X(U)$ suit la même loi que X.

e) On suppose que X admet pour densité la fonction f définie dans la question 1.c) et que p n'est plus fixé.
Déterminer la fonction $G_X : p \longmapsto G_X(p)$ définie sur $]0,1[$.

Partie II. Fonction de répartition conjointe de deux variables aléatoires de lois uniformes.

4. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires et F la fonction de répartition conjointe de X et Y.
Soit $x \in \mathbf{R}$.

a) Montrer que la fonction $y \longmapsto F(x,y)$ est croissante sur $\mathbf{R}$.

b) Établir l'égalité : $[X \leqslant x] = \bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} \big([X \leqslant x] \cap [Y \leqslant n]\big)$.

c) Montrer que $F(x,y)$ tend vers $P\big([X \leqslant x]\big)$ lorsque y tend vers $+\infty$.

d) Quelle est la limite de $F(x,y)$ lorsque y tend vers $-\infty$?

e) Soit a, a', b, b' des réels vérifiant : $a \leqslant a'$ et $b \leqslant b'$. On pose : $A = [a < X \leqslant a']$ et $B = [b < Y \leqslant b']$.

(*i*) Exprimer la probabilité $P(A \cap B)$ en fonction de $P\big([X \leqslant a] \cap B\big)$ et $P\big([X \leqslant a'] \cap B\big)$.

(*ii*) Établir l'égalité : $P(A \cap B) = F(a',b') - F(a',b) - F(a,b') + F(a,b)$.

Dans les questions 5 et 6, on note U et V deux variables aléatoires suivant chacune la loi uniforme sur $[0,1]$ et $F_{(U,V)}$ leur fonction de répartition conjointe.
On note C la restriction de $F_{(U,V)}$ à $[0,1]^2$: $\forall (u,v) \in [0,1]^2,\ C(u,v) = P\big([U \leqslant u] \cap [V \leqslant v]\big)$.
Pour tout couple $(u,v) \in [0,1]^2$, on pose : $C_+(u,v) = \min\{u,v\}$ et $C_-(u,v) = \max\{u+v-1, 0\}$.
Pour $(u,v) \in [0,1]^2$, on note $\overline{[U > u] \cup [V > v]}$ l'événement contraire de l'événement $[U > u] \cup [V > v]$.
On rappelle que si deux vecteurs aléatoires (X_1,Y_1) et (X_2,Y_2) ont même loi et si g est une fonction continue sur $\mathbf{R}^2$ à valeurs dans $\mathbf{R}$, alors les variables aléatoires $g(X_1,Y_1)$ et $g(X_2,Y_2)$ ont même loi.

5.a) Comparer pour tout $(u,v) \in [0,1]^2$, les trois événements : $\overline{[U > u] \cup [V > v]}$, $[U \leqslant u] \cap [V \leqslant v]$ et $[U \leqslant u]$.

b) Justifier pour tout $(u,v) \in [0,1]^2$, la double inégalité : $u + v - 1 \leqslant C(u,v) \leqslant u$.

c) En déduire l'encadrement suivant : $\forall (u,v) \in [0,1]^2,\ C_-(u,v) \leqslant C(u,v) \leqslant C_+(u,v)$.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 16 pages.

6.a) Calculer $F_{(U,U)}(x,y)$ selon les valeurs du couple (x,y) de $\mathbf{R}^2$.

b) Représenter dans le plan rapporté à un repère orthonormé une ligne de niveau pour la fonction de deux variables $F_{(U,U)}$, correspondant à une valeur de la fonction strictement comprise entre 0 et 1.
Hachurer sur la même figure, l'ensemble des couples $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ pour lesquels $F_{(U,U)}(x,y) = x$.

c) Montrer que C est égale à C_+ si et seulement si les variables aléatoires U et V sont égales presque sûrement.

d) Calculer la fonction de répartition conjointe $F_{(U,1-U)}$ et donner une condition nécessaire et suffisante portant sur U et V pour que C soit égale à C_- .

Partie III. Copules.

On appelle *copule* toute fonction Φ définie sur $[\,0,1\,]^2$, à valeurs réelles, vérifiant les trois propriétés suivantes :

- $\forall\, u \in [\,0,1\,],\ \Phi(u,0) = \Phi(0,u) = 0\,;$
- $\forall\, u \in [\,0,1\,],\ \Phi(u,1) = \Phi(1,u) = u\,;$
- $\forall\, (u,u',v,v') \in [\,0,1\,]^4,\ u \leqslant u'$ et $v \leqslant v' \implies \Phi(u',v') - \Phi(u',v) - \Phi(u,v') + \Phi(u,v) \geqslant 0.$

On appelle *copule à densité* toute copule Φ dont la restriction à l'ouvert $]\,0,1\,[^2$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]\,0,1\,[^2$.

7. *Exemples.* On reprend le contexte et les notations du préambule des questions 5 et 6.

a) Vérifier que C est une copule. Dans la suite (Partie IV), on l'appelle la *copule associée au couple* (U,V).

b) En déduire que C_+, C_- ainsi que la fonction Π définie sur $[\,0,1\,]^2$ par $\Pi(u,v) = uv$ sont des copules.

8. Soit Φ une copule à densité et $(a,b) \in]\,0,1\,[^2$.

Pour tout couple (h,k) de réels non nuls tels que $(a+h, b+k) \in]\,0,1\,[^2$, on pose :

$$G(h,k) = \frac{1}{h\,k}\left(\Phi(a+h,b+k) - \Phi(a+h,b) - \Phi(a,b+k) + \Phi(a,b)\right).$$

a) Soit h un réel non nul tel que $a + h \in]\,0,1\,[$.
Justifier que $G(h,k)$ admet une limite $H(h)$ lorsque k tend vers 0 et exprimer $H(h)$ à l'aide de la dérivée partielle $\partial_2(\Phi)$ de Φ par rapport à sa seconde variable.

b) On note $\partial^2_{1,2}(\Phi)$ la dérivée partielle seconde croisée de Φ sur $]\,0,1\,[^2$ et on rappelle que $\partial^2_{1,2}(\Phi) = \partial^2_{2,1}(\Phi)$.
Trouver la limite de $H(h)$ lorsque h tend vers 0 et en déduire que $\partial^2_{1,2}(\Phi)(a,b) \geqslant 0$.

9. Soit φ une fonction définie sur $[\,0,1\,]^2$, à valeurs réelles, continue sur $[\,0,1\,]^2$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]\,0,1\,[^2$.
Pour tout $(u,u',v,v') \in [\,0,1\,]^4$, on pose : $\Psi(u,u',v,v') = \varphi(u',v') - \varphi(u',v) - \varphi(u,v') + \varphi(u,v)$.

a) Pour tout $(u,u',v,v') \in]\,0,1\,[^4$, justifier l'égalité : $\Psi(u,u',v,v') = \displaystyle\int_v^{v'} \left(\int_u^{u'} \partial^2_{1,2}(\varphi)(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$

b) Soit u et u' des réels tels que : $0 \leqslant u \leqslant u' \leqslant 1$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $\begin{cases} u_n = \dfrac{1}{3n} + \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)u \\ u'_n = \dfrac{2}{3n} + \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)u' \end{cases}$.
Vérifier pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, les inégalités strictes suivantes : $0 < u_n < u'_n < 1$.

c) On pose : $\begin{cases} T_0 = \{(u,u',v,v') \in \mathbf{R}^4\ ;\ 0 < u < u' < 1,\ 0 < v < v' < 1\} \\ T = \{(u,u',v,v') \in \mathbf{R}^4\ ;\ 0 \leqslant u \leqslant u' \leqslant 1,\ 0 \leqslant v \leqslant v' \leqslant 1\} \end{cases}$.
On suppose que la fonction Ψ est positive ou nulle sur T_0. Montrer que Ψ est positive ou nulle sur T.

d) En déduire que, pour que la fonction φ soit une copule, *il suffit* qu'elle vérifie les trois propriétés suivantes :

- $\forall\, u \in [\,0,1\,],\ \varphi(u,0) = \varphi(0,u) = 0\,;$
- $\forall\, u \in [\,0,1\,],\ \varphi(u,1) = \varphi(1,u) = u\,;$
- $\forall\, (x,y) \in]\,0,1\,[^2,\ \partial^2_{1,2}(\varphi)(x,y) \geqslant 0.$

Tournez la page S.V.P.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 16 pages.

Partie IV. Familles de copules et simulation.

10. Soit M la fonction définie sur $[0,1]^2$ par : $\forall (u,v) \in [0,1]^2,\ M(u,v) = uv\,(u+v-uv)$.

a) Montrer que la fonction $S : (u,v) \longmapsto u+v-2\,uv$ admet sur $[0,1]^2$ un minimum global c et un maximum global d et les calculer.

b) Montrer que M est une copule à densité.

c) Soit $\theta \in \mathbf{R}$ et M_θ la fonction définie sur $[0,1]^2$ par : $\forall (u,v) \in [0,1]^2,\ M_\theta(u,v) = (1-\theta)\,uv + \theta\,M(u,v)$. Pour quelles valeurs de θ la fonction M_θ est-elle une copule ?

11. Soit N une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ et U_0, V_0, U_1, V_1 quatre variables aléatoires suivant chacune la loi uniforme sur $[0,1]$.

On suppose que (U_0,V_0), (U_1,V_1) et N sont mutuellement indépendants, autrement dit, on suppose que pour tout $(u_0,v_0,u_1,v_1,x) \in \mathbf{R}^5$, on a :

$$P\big([U_0 \leqslant u_0] \cap [V_0 \leqslant v_0] \cap [U_1 \leqslant u_1] \cap [V_1 \leqslant v_1] \cap [N \leqslant x]\big) = F_{(U_0,V_0)}(u_0,v_0)\,F_{(U_1,V_1)}(u_1,v_1)\,P\big([N \leqslant x]\big)\,.$$

a) Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose : $U_N(\omega) = \begin{cases} U_0(\omega) & \text{si } N(\omega)=0 \\ U_1(\omega) & \text{si } N(\omega)=1 \end{cases}$ et $V_N(\omega) = \begin{cases} V_0(\omega) & \text{si } N(\omega)=0 \\ V_1(\omega) & \text{si } N(\omega)=1 \end{cases}$.

Montrer que U_N et V_N sont des variables aléatoires et suivent chacune la loi uniforme sur $[0,1]$.

b) Exprimer la copule associée au couple (U_N,V_N) à l'aide des copules associées aux deux couples (U_0,V_0) et (U_1,V_1).

12. Soit $p \in]0,1[$ et C_p la fonction définie sur $[0,1]^2$ par : $\forall (u,v) \in [0,1]^2,\ C_p(u,v) = p\,uv + (1-p)\min\{u,v\}$.

a) Montrer que C_p est une copule.

b) Proposer une méthode de simulation d'un couple aléatoire (U,V) auquel est associée la copule C_p et donner le code *Scilab* d'une fonction `simulc` réalisant cette simulation pour toute valeur donnée de p.
Cette fonction aura pour seul argument le paramètre p et retournera le couple (u,v).

13. Soit X et Y deux variables aléatoires à densité, de fonctions de répartition respectives F_X et F_Y.

Pour tout $p \in]0,1[$, on pose : $\begin{cases} G_X(p) = \inf\big(\{x \in \mathbf{R};\ F_X(x) = p\}\big) \\ G_Y(p) = \inf\big(\{x \in \mathbf{R};\ F_Y(x) = p\}\big) \end{cases}$.

Soit C la fonction définie sur $[0,1]^2$ par : $C(u,v) = \begin{cases} F_{(X,Y)}\big(G_X(u),G_Y(v)\big) & \text{si } (u,v) \in]0,1[^2 \\ 0 & \text{si } uv = 0 \\ u & \text{si } v = 1 \\ v & \text{si } u = 1 \end{cases}$.

Montrer que C est une copule. En déduire un procédé de simulation du couple (X,Y) à partir de la simulation (u,v) d'un couple (U,V) auquel la copule C est associée.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 16 pages.

ANNALES DE MATHEMATIQUES

HEC-ESCP VOIE SCIENTIFIQUE

CORRIGE

PARTIE I

1–a)

$h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$. La fonction h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)dx$ est impropre uniquement en 0 et $+\infty$.

- $h(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$. D'après le critère de Riemann, $\frac{1}{2} < 1 \Longrightarrow \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ est convergente.

D'après le théorème d'équivalence des fonctions continues, positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 h(x)dx$ est convergente.

- $h(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x\sqrt{x}} = \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$. D'après le critère de Riemann, $\frac{3}{2} > 1 \Longrightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$ est convergente. D'après le théorème d'équivalence des fonctions continues, positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(x)dx$ est convergente.

Les deux intégrales $\displaystyle\int_0^1 h(x)dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(x)dx$ sont convergentes, donc

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} h(x)dx \text{ est convergente}}$$

1–b)

$X(\Omega) = \mathbb{R}_+$. Soit F_X la fonction de répartition de X. Soit $x \geq 0$.

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) = P(\tan^2(V) \leq x) \\ &= P(\tan V \leq \sqrt{x}) \quad \text{car } \tan V \geq 0 \text{ et la fonction racine carrée est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+ \\ &= P(V \leq \arctan(\sqrt{x})) \quad \text{car la fonction arctan est strictement croissante.} \end{aligned}$$

$x \geq 0 \Longrightarrow \arctan x \in [0, \frac{\pi}{2}[$. Par suite $P(V \leq \arctan(\sqrt{x})) = \dfrac{\arctan\sqrt{x}}{\frac{\pi}{2}} = 2\dfrac{\arctan\sqrt{x}}{\pi}$.

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 2\dfrac{\arctan\sqrt{x}}{\pi} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}}$$

La fonction F_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$. Elle est continue sur $\mathbb{R}$ car elle l'est en zéro sans problème. De plus la fonction arctan est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ implique $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\dfrac{\arctan\sqrt{x}}{\pi} = 1$.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 16 pages.

La variable X est une variable aléatoire à densité

1–b)

De plus, $\forall x > 0,\ F'_X(x) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} = \frac{1}{\pi\sqrt{x}(1+x)}$. On prendra pour densité f_X de X :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{x}(1+x)} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

2–a)

D'après la définition, $X = \tan^2 V$. Comme V suit la loi uniforme sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, V suit la même loi que $\frac{\pi}{2}$ rand.

```
function x=simulX(N)
u=rand(N,1)
x=ones(u)
for i=1:N
x(i,1)=(tan(%pi/2*u(i,1)))^2
end
endfunction
```

2–b)

y est le nombre de fois où X a pris une valeur supérieure à 1. Comme il s'agit de variable à densité, la variable qui prend pour valeur y est Y=max(X,1).

q est la probabilité que X soit supérieur à 1.

Exécutions du script

```
N=.....5000
q========
0.528
N=.....10000
q========
0.5006
N=.....100000
q========
0.5008
```

On s'attend à $q = \frac{1}{2}$; en effet,

$X > 1 \iff \tan^2 V > 1 \iff \tan V > 1 \iff V \in]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}[$. Or V suit la loi uniforme sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, donc

$P(X > 1) = \frac{1}{2}$. Une variable aléatoire répondant à la question est une variable de Bernoulli qui prend la valeur 0 si $X \leq 1$ et la valeur 1 si $X > 1$. C'est la variable indicatrice de l'évènement $[X > 1]$.

3–a)

$\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$, donc il existe $x_o \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \leq x_0,\ F_X(x) < p$

$$J_p \neq \emptyset$$

F_X est continue sur $\mathbb{R}$, croissante sur $\mathbb{R}$. L'image de $\mathbb{R}$ par F_X est l'un des quatre intervalles suivants : $[0,1],\ ]0,1],\ ]0,1],\ ]0,1[$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 16 pages.