Problème

Dans tout le problème, $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ désigne un espace probabilisé. Soit (A_n) une suite d'événements de $\mathcal{T}$ et on note alors :

$$A = \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{n\geqslant N} A_n \right) \qquad B = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{n\geqslant N} A_n \right)$$

1. (a) Justifier que $(A, B) \in \mathcal{T}^2$.

   (b) Ecrire les phrases logiques décrivant les assertions $x \in A$ et $x \in B$ et expliquer à l'aide d'une phrase pour chaque ce que désignent les événements A et B.

   (c) Montrer que $B \subset A$.

2. On considère ici la suite des événements définis par $\forall k \in \mathbb{N}, D_k = \bigcup_{n\geqslant k} A_n$.

   (a) Justifier que (D_k) est décroissante.

   (b) On suppose que la série $\sum_n P(A_n)$ converge. Montrer que $\lim_{k\to+\infty} P(D_k) = 0$.

   (c) En déduire que $P(A) = 0$. Que dire de $P(B)$?

3. On suppose dans cette question que la série $\sum_n P(A_n)$ diverge et que les A_n sont **deux à deux indépendants**.

   (a) Justifier l'inégalité : $\forall x \in \mathbb{R}, 1 + x \leqslant e^x$.

   (b) Montrer que pour $1 \leqslant m \leqslant n$ on a $P\left(\bigcap_{k=m}^{n} \overline{A_k} \right) \leqslant \exp\left(-\sum_{k=m}^{n} (A_k) \right)$.

   (c) En déduire que $P(A) = 1$. Que cela signifie-t-il ?

4. *Le singe dactylographe !* On considère une œuvre de la littérature de N caractères. Un singe tape au hasard des caractères sur un clavier en comportant C une infinité de fois. On se demande si l'œuvre en question a été tapé correctement au moins une fois.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit A_n l'événement : "L'œuvre est correctement tapée entre le $nN + 1$-ème et le $(n + 1)N$-ème caractère. Donner $P(A_n)$.

   (b) Justifier que les A_n sont tous indépendants et montrer alors que l'œuvre sera tapée correctement une infinité de fois par le singe (!).

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.