ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ALGEBRE ENONCE NUMERO 1

Soit la suite de polynômes $(T_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$T_0 = 1,\ T_1 = X \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

1)

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n est un polynôme de degré n, de coefficient dominant que l'on explicitera.

a) Montrer que pour tous réels a et b, on a : $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$.

En déduire que

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

2)

Pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on pose $I(p,q) = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(p\theta)\cos(q\theta)d\theta$.

Calculer $I(p,q)$.

3)

Pour tout couple (P,Q) d'éléments de $\mathbb{R}[X]$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$ est convergente. On la note $\langle P,Q\rangle$.

Montrer que $(P,Q) \mapsto \langle P,Q\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On note $||\,.\,||$ la norme associée.

4)

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(T_0,\ldots,T_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. Cette base est-elle orthonormale ?

5)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\langle X^n, T_n\rangle$.

6)

En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, la valeur de

$$d = \inf_{(a_0,\ldots,a_{n-1})\in\mathbb{R}^n} \left(\sqrt{\int_{-1}^{1} \frac{(t^n - (a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0))^2}{\sqrt{1-t^2}}dt}\right)$$

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.