



ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ALGEBRE ENONCE NUMERO 1

Soit la suite de polynômes $(T_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$T_0 = 1, T_1 = X \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

1) _____

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n est un polynôme de degré n , de coefficient dominant que l'on explicitera.

a) Montrer que pour tous réels a et b , on a : $\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$.
En déduire que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

2) _____

Pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on pose $I(p, q) = \int_0^\pi \cos(p\theta) \cos(q\theta) d\theta$.

Calculer $I(p, q)$.

3) _____

Pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}[X]$, montrer que l'intégrale $\int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ est convergente. On la note $\langle P, Q \rangle$.

Montrer que $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On note $\| \cdot \|$ la norme associée.

4) _____

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille (T_0, \dots, T_n) est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. Cette base est-elle orthonormale ?

5) _____

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\langle X^n, T_n \rangle$.

6) _____

En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, la valeur de

$$d = \inf_{(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n} \left(\sqrt{\int_{-1}^1 \frac{(t^n - (a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_0))^2}{\sqrt{1-t^2}} dt} \right)$$