



ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ALGEBRE ENONCE NUMERO 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des formes linéaires sur E .

Pour tout polynôme P , on note $P^{(k)}$ la dérivée $k^{\text{ème}}$ de P .

Soit $Q \in E$ de degré n . Pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $Q_i(X) = P(X+i)$.

Le but de l'exercice est de montrer que la famille (Q_0, Q_1, \dots, Q_n) est une base de E .

1)

Montrer que la famille $(Q, Q', Q'', \dots, Q^{(n)})$ est une base de E .

2)

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on définit l'application f_k par :

$$f_k : E \rightarrow \mathbb{R}, P \mapsto P^{(k)}(0)$$

a) Vérifier que f_k est dans E^* .

b) Pour tout couple $(k, \ell) \in (\llbracket 0, n \rrbracket)^2$, calculer $f_k(X^\ell)$.

c) Montrer que (f_0, f_1, \dots, f_n) est une famille libre de E^* .

3)

Soit $\varphi \in E^*$.

a) Déterminer la dimension de E^* .

b) Montrer qu'il existe un unique $(n+1)$ -uplet $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$\forall P \in E, \varphi(P) = \sum_{i=0}^n a_i P^{(i)}$$

c) Soit $\varphi \in E^*$ tel que $\varphi(Q_0) = \varphi(Q_1) = \dots = \varphi(Q_n) = 0$. Montrer que $\varphi = 0$.

4)

On suppose que (Q_0, Q_1, \dots, Q_n) n'est pas une base de E .

a) Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel H de E tel que $\dim(H) = n$ et $\text{vect}(Q_0, Q_1, \dots, Q_n) \subset H$.

b) Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que $E = \text{vect}(a) \oplus H$.

c) On définit une application $\psi_a : E \rightarrow \mathbb{R}$ comme suit :

$$\text{Pour tout } x \in E \text{ s'écrivant } x = \mu a + h \text{ avec } \mu \in \mathbb{R} \text{ et } h \in H, \psi_a(x) = \mu$$

Montrer que ψ_a est une forme linéaire sur E et déterminer son noyau.

d) Aboutir à une contradiction et conclure.