

HEC ESCP ORAL MATH



## ORAL DE MATHEMATIQUES

## HEC ESCP

## ALGEBRE ENONCE NUMERO 2

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $E = \mathbb{R}_n[X]$ . On note  $E^* = \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des formes linéaires sur E.

Pour tout polynôme P, on note  $P^{(k)}$  la dérivée k ème de P.

Soit  $Q \in E$  de degré n. Pour tout  $i \in [0, n]$ , on pose  $Q_i(X) = P(X + i)$ .

Le but de l'exercice est de montrer que la famille  $(Q_0, Q_1, \dots, Q_n)$  est une base de E.

1) \_\_\_\_\_

Montrer que la famille  $(Q, Q', Q'', \dots, Q^{(n)})$  est une base de E.

2) \_\_\_\_\_

Pour tout  $k \in [0, n]$ , on définit l'application  $f_k$  par :

$$f_k : E \to \mathbb{R}, P \mapsto P^{(k)}(0)$$

- a) Vérifier que  $f_k$  est dans  $E^*$ .
- **b)** Pour tout couple  $(k, \ell) \in ([0, n])^2$ , calculer  $f_k(X^{\ell})$ .
- c) Montrer que  $(f_0, f_1, ..., f_n)$  est une famille libre de  $E^*$ .
- 3) \_\_\_\_\_

Soit  $\varphi \in E^*$ .

- a) Déterminer la dimension de  $E^*$ .
- **b)** Montrer qu'il existe un unique (n+1)-uplet  $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  tel que

$$\forall P \in E, \ \varphi(P) = \sum_{i=0}^{n} a_i P^{(i)}$$

- c) Soit  $\varphi \in E^*$  tel que  $\varphi(Q_0) = \varphi(Q_1) = \cdots = \varphi(Q_n) = 0$ . Montrer que  $\varphi = 0$ .
- 4) \_\_\_\_\_

On suppose que  $(Q_0, Q_1, \dots, Q_n)$  n'est pas une base de E.

- a) Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel H de E tel que  $\dim(H)=n$  et  $\mathrm{vect}(Q_0,Q_1,\ldots,Q_n)\subset H.$
- **b)** Montrer qu'il existe  $a \in E$  tel que  $E = \text{vect}(a) \bigoplus H$ .
- c) On définit une application  $\psi_a : E \to \mathbb{R}$  comme suit :

Pour tout  $x \in E$  s'écrivant  $x = \mu a + h$  avec  $\mu \in \mathbb{R}$  et  $h \in H$ ,  $\psi_a(x) = \mu$ 

Montrer que  $\psi_a$  est une forme linéaire sur E et déterminer son noyau.

d) Aboutir à une contradiction et conclure.