ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ALGEBRE ENONCE NUMERO 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des formes linéaires sur E.

Pour tout polynôme P, on note $P^{(k)}$ la dérivée $k^{\text{ème}}$ de P.

Soit $Q \in E$ de degré n. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on pose $Q_i(X) = P(X + i)$.

Le but de l'exercice est de montrer que la famille $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ ***est une base de*** E.

1)

Montrer que la famille $(Q, Q', Q'', \ldots, Q^{(n)})$ est une base de E.

2)

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on définit l'application f_k par :

$$f_k \ : \ E \to \mathbb{R}, \ P \mapsto P^{(k)}(0)$$

a) Vérifier que f_k est dans E^*.

b) Pour tout couple $(k, \ell) \in ([\![0, n]\!])^2$, calculer $f_k(X^\ell)$.

c) Montrer que $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est une famille libre de E^*.

3)

Soit $\varphi \in E^*$.

a) Déterminer la dimension de E^*.

b) Montrer qu'il existe un unique $(n+1)-$uplet $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$\forall P \in E, \ \varphi(P) = \sum_{i=0}^{n} a_i P^{(i)}$$

c) Soit $\varphi \in E^*$ tel que $\varphi(Q_0) = \varphi(Q_1) = \cdots = \varphi(Q_n) = 0$. Montrer que $\varphi = 0$.

4)

On suppose que $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ n'est pas une base de E.

a) Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel H de E tel que $\dim(H) = n$ et $\text{vect}(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n) \subset H$.

b) Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que $E = \text{vect}(a) \bigoplus H$.

c) On définit une application $\psi_a \ : \ E \to \mathbb{R}$ comme suit :

Pour tout $x \in E$ s'écrivant $x = \mu a + h$ avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $h \in H$, $\psi_a(x) = \mu$

Montrer que ψ_a est une forme linéaire sur E et déterminer son noyau.

d) Aboutir à une contradiction et conclure.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.