ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ALGEBRE ENONCE NUMERO 3

Dans tout cet exercice, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et $\mathbb{Z}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

1)

Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on note $\varphi_n(P)$ le quotient dans la division euclidienne de $P(-1) - P(X)$ par $X + 1$.

a) Démontrer que φ_n ainsi définie est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Déterminer son noyau.

c) L'application φ_n est-elle une surjection de $\mathbb{R}_n[X]$ vers $\mathbb{R}_{n-1}[X]$?

2)

Ecrire la matrice de φ_n dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

3)

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Démontrer que $\varphi_n(P)$ s'écrit $\sum_{j=0}^{n-1} b_j X^j$ avec, pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$:

$$b_j = (-1)^j \sum_{k=j+1}^{n} (-1)^k a_k$$

Dans la suite de cet exercice, on considère la suite de polynômes $(T_n(X))_{n\geq 0}$ ***définie par*** $T_0(X) = 1$, $T_1(X) = 1-2X$ ***puis, pour tout*** $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2}(X) = 2(1-2X)T_{n+1}(X) - T_n(X)$

4)

Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $v_n = T_n(-1)$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, trouver l'expression de v_n en fonction de n.

b) Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, v_n est un entier strictement positif.

5)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré de T_n et montrer que $T_n \in \mathbb{Z}[X]$. Déterminer son coefficient dominant.

6)

Démontrer que $\varphi_n(T_n) \in \mathbb{Z}[X]$.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.