ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ALGEBRE ENONCE NUMERO 6

Dans cet exercice, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie.

$$\forall (f,g)\in E^2,\ \text{on pose } [f,g]=fg-gf \text{ où } fg=f\circ g.$$

On dira qu'un endomorphisme f de E est nilpotent s'il existe un entier naturel n tel que $f^n=0$.

1–a)

Montrer que $\forall (f,g,h)\in E^3,\ [[f,g],h]+[[g,h],f]+[[h,f],g]=0$.

b) Soit $(f,g)\in E^2$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $[f,g]=[g,f]$.

2)

Soit $f\in E$. On souhaite montrer, dans cette question, l'équivalence des propositions :

i) Il existe un projecteur p de E tel que $f=[p,f]$.

ii) $f^2=0$.

a) On suppose i). Montrer successivement que $pfp=0$ puis $fp=0$ et conclure.

b) On suppose ii). En considérant un projecteur d'image $\operatorname{Im} f$, conclure.

3)

Soit g fixé dans $\mathcal{L}(E)$.

a) Démontrer que l'application $\varphi_g\ :\ \mathcal{L}(E)\longrightarrow\mathcal{L}(E),\ f\mapsto[f,g]$ est linéaire.

b) Démonter que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall f\in\mathcal{L}(E),\ (\varphi_g)^n(f)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}g^kfg^{n-k}.$$

c) En déduire que si g est nilpotent, alors φ_g est nilpotent.

4)

Résoudre l'équation $[f,g]=\mathrm{Id}_E$, d'inconnues f et g appartenant à $\mathcal{L}(E)$.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.