ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ALGEBRE ENONCE NUMERO 7

1)

Montrer, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, la convergence de l'intégrale

$$\int_0^1 t^2(\ln t - xt - y)^2 dt$$

On note $\varphi(x,y)$ la valeur de cette intégrale.

2)

Montrer que les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ sont strictement positives.

3–a)

Montrer que la fonction φ précédemment définie est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle admet un point critique (x_0, y_0) que l'on déterminera.

b) Montrer que $\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \{\varphi(x,y)\} = \varphi(x_0,y_0)$.

4)

Montrer que l'ensemble E des fonctions continues sur $]0,1]$ telles que l'intégrale $\int_0^1 t^2 f^2(t)dt$ converge est un espace vectoriel réel et que l'on définit un produit scalaire sur E en posant :

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 t^2 f(t)g(t)dt$$

5)

Montrer que si X est un ensemble non vide et si h est une application de X dans $\mathbb{R}_+$, alors $\inf_X (h^2(x)) = (\inf_X (h(x)))^2$.

En déduire, à l'aide de la question 4), mais indépendamment des résultats de la question 3), comment retrouver que

$$\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} (\varphi(x,y)) = \varphi(x_0,y_0)$$

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

CORRIGE EXO D'ALGEBRE NUMERO 7

1)

$$\begin{aligned} t^2(\ln t - xt - y)^2 &= t^2((\ln t)^2 + x^2t^2 + y^2 - 2xt\ln t - 2y\ln t + 2xyt) \\ &= t^2(\ln t)^2 - 2xt^3\ln t - 2yt^2\ln t + t^4x^2 + t^2y^2 + 2xyt^3 \end{aligned}$$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{t\to 0} t^2(\ln t)^2 = \lim\limits_{t\to 0} t^3\ln t = \lim\limits_{t\to 0} t^2\ln t = 0$. La fonction $t \mapsto t^2(\ln t)^2 - 2xt^3\ln t - 2yt^2\ln t + t^4x^2 + t^2y^2 + 2xyt^3$ est prolongeable par continuité au point 0. Or, par les théorèmes généraux, cette fonction est continue sur $]0,1]$, l'intégrale $\int_0^1 t^2(\ln t - xt - y)^2 dt$ est faussement impropre, donc convergente.

$$\boxed{\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \varphi(x,y) = \int_0^1 t^2(\ln t - xt - y)^2 dt \text{ existe}}$$

2)

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} - \lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} - \lambda \end{pmatrix}.$$

λ est valeur propre de A si et seulement si le déterminant Δ de $A - \lambda I$ est nul.

$$\begin{aligned} \Delta &= (\tfrac{2}{5} - \lambda)(\tfrac{2}{3} - \lambda) - \tfrac{1}{4} = \lambda^2 - (\tfrac{2}{5} + \tfrac{2}{3})\lambda + \tfrac{4}{15} - \tfrac{1}{4} \\ &= \lambda^2 - \tfrac{16}{15}\lambda + \tfrac{1}{60}. \end{aligned}$$

Le discriminant vaut $(\frac{16}{15})^2 - 4\frac{1}{60} = \frac{256}{225} - \frac{1}{15} > 0$ de manière évidente. Le déterminant admet deux racines distinctes. Leur produit $\frac{1}{60}$ est > 0, elles sont de même signe ; leur somme $\frac{16}{15}$ est > 0, elles sont positives strictement.

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ admet deux valeurs propres distinctes, strictement positives}}$$

3-–a)

Notons $I(p,q) = \int_0^1 t^p(\ln t)^q dt$ et développons $\varphi(x,y)$ par linéarité des intégrales convergentes.

$$\varphi(x,y) = I(2,2) - 2xI(3,1) - 2yI(2,1) + \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} + \frac{xy}{2}.$$

φ est une fonction polynomiale, donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

- Calcul de $I(p,q)$. Soit $a \in]0,1]$. Intégrons $\int_a^1 t^p(\ln t)^q dt$ par parties.

$u(t) = (\ln t)^q \Longrightarrow u'(t) = \frac{q}{t}(\ln t)^{q-1}$ pour $q \geq 1$; $v'(t) = t^p \Longleftarrow v(t) = \frac{1}{p+1}t^{p+1}$. Les fonctions u et v sont C^1 sur $]0,1]$, l'intégration par parties est légitime.

$$\begin{aligned} \int_a^1 t^p(\ln t)^q dt &= \Big[\frac{t^{p+1}}{p+1}(\ln t)^q\Big]_a^1 - \frac{q}{p+1}\int_0^1 t^p(\ln t)^{q-1}dt \\ &= -\frac{a^{p+1}}{p+1}(\ln a)^q - \frac{q}{p+1}\int_0^1 t^p(\ln t)^{q-1}dt. \end{aligned}$$

$\lim\limits_{a\to 0}\frac{a^{p+1}}{p+1}(\ln a)^q = 0$ par croissances comparées, donc $I(p,q) = -\frac{q}{p+1}I(p,q-1)$ pour $q \geq 1$. Divisons cette égalité par $q!$, on obtient : $\frac{I(p,q)}{q!} = -\frac{1}{p+1}\frac{I(p,q-1)}{(q-1)!}$ pour

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.