Chapitre 1

Formulaire SUP

Retrouvez ci-dessous les théorèmes et les formules les plus importants de votre cours de mathématiques de première année.

Point méthode

Utiliser le formulaire.

Ce formulaire est un outil pour vous permettre de réviser vos définitions, vos formules, ainsi que les théorèmes les plus importants du cours de première année de prépa scientifique. Il est bien sûr nécessaire de commencer par apprendre le cours avant d'utiliser le formulaire ! Bon travail à tous.

Ensembles, applications, sommes

Formulaire

Partition. $\{A_i\}_{i\in I}$ est une partition de Ω si :

- $\forall i \in I,\ A_i \neq \varnothing$,
- $\forall (i,j) \in I^2, i \neq j,\ A_i \cap A_j = \varnothing$,
- $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \Omega$.

Ensemble stable. A est stable par f si : $f(A) \subset A$, i.e. si : $\forall x \in A, f(x) \in A$.

Relation d'ordre. $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E si :

- $\mathcal{R}$ est *réflexive* : $\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$,
- $\mathcal{R}$ est *transitive* : $\forall (x,y) \in E^2$, $(x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$,
- $\mathcal{R}$ est *antisymétrique* :$\forall (x,y,z) \in E^3$, $(x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$.

Relation d'équivalence. $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E si :

- $\mathcal{R}$ est *réflexive*
- $\mathcal{R}$ est *transitive*
- $\mathcal{R}$ est *symétrique* : $\forall (x,y) \in E^2$, $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.

Image directe. Avec $f : E \to F$ et $A \subset E$: $f(A) = \{f(x), x \in A\} = \{y \in F, \exists, x \in A,\ f(x) = y\}$.

Image réciproque. Avec $f : E \to F$ et $B \subset F$: $f^{-1}(B) = \{x \in E,\ f(x) \in B\}$.

Injections, surjections, bijections. Avec $f : E \to F$:

- f est *injective* si : $\forall (x,x') \in E^2,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.
- f est *surjective* si : $\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$.
- f est *bijective* si : $\forall y \in F, \exists! x \in E, f(x) = y$.

- Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
- Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
- Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

Sommes. $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Formule du binôme. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N},\ (a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Suites arithmétiques. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r à partir du terme u_p, alors :
- $\forall n \geqslant p, u_n = u_p + (n-p)r$,
- $\forall n \geqslant p,\ \sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1)\dfrac{u_p+u_n}{2}$.

Suites géométriques. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison q à partir du terme u_p, alors :
- $\forall n \geqslant p, u_n = q^{n-p}u_p$,
- Si $q \neq 1$: $\forall n \geqslant p,\ \sum_{k=p}^{n} u_k = u_p\dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$.

Définition de la convergence. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.

Théorème de convergence les plus importants.

- **Théorème de la limite monotone.** Toute suite croissante admet une limite finie ou égale à $+\infty$. Toute suite croissante et majorée converge vers sa borne supérieure. Résultats analogues pour les suites décroissantes.
- **Théorème de l'encadrement.** Si à partir d'un certain rang : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une limite commune ℓ, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
- **Théorème de prolongement des inégalités.** Si à partir d'un certain rang : $u_n \leqslant v_n$, et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers ℓ et ℓ', alors : $\ell \leqslant \ell'$.

Comparaison de suites.

- **Suites négligeables.** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et l'on note $u_n = o(v_n)$, si il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$: $u_n = \varepsilon_n v_n$, où : $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
- **Suites équivalentes.** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et l'on note $u_n \sim v_n$, si $u_n - v_n = o(v_n)$, i.e. si il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$: $u_n = h_n v_n$, où : $h_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

Equivalents usuels. Si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, alors :
- $\ln(1+u_n) \sim u_n$,
- $e^{u_n} - 1 \sim u_n$,
- $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$,
- $\sin u_n \sim u_n$,
- $\cos u_n - 1 \sim -\dfrac{u_n^2}{2}$.

Suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$. Si : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, alors :

- Si f est croissante, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone : croissante si $u_0 \leqslant u_1$ et décroissante dans le cas contraire.
- Si f est décroissante, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens de variation contraires.
- Si f change de variations, on peut se ramener à un intervalle I stable par f contenant tous les termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir d'un certain rang, sur lequel f soit monotone.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et si f est **continue** en ℓ, alors : $\ell = f(\ell)$.

Sommes de Riemann. Si f est continue sur $[a,b]$, alors :
- $s_n = \dfrac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
- $S_n = \dfrac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

En particulier pour $a = 0$ et $b = 1$: $\dfrac{1}{n}\sum_{k=0\text{ ou }1}^{n-1\text{ ou }n} f\left(\dfrac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Nombres complexes

Formulaire

Exponentielle complexe. $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Les deux écritures d'un nombre complexe non nul.

— $z = a + ib = re^{i\theta} = r\cos\theta + i\,r\sin\theta$.
— $\overline{z} = a - ib = re^{-i\theta} = r\cos\theta - i\,r\sin\theta$. $z\overline{z} = |z|^2$.
— $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$. $\cos\theta = \dfrac{a}{r}$, $\sin\theta = \dfrac{b}{r}$, $\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{b}{r+a}$.

Inégalité triangulaire. $\forall (x, y) \in \mathbb{C}^2$, $|x+y| \leqslant |x| + |y|$.

Formule de Moivre. $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$. En particulier :

— $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\cos n\theta = \mathrm{Re}\,((\cos\theta + i\sin\theta)^n)$.
— $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\sin n\theta = \mathrm{Im}\,((\cos\theta + i\sin\theta)^n)$.

Formules d'Euler. Pour tout réel θ :

— $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$.
— $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Fonction exponentielle complexe. $\forall z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) = e^{\mathrm{Re}\,z}e^{i\,\mathrm{Im}\,z}$. Pour tous complexes z et z' :

— $\exp(z + z') = \exp(z)\exp(z')$.
— $\dfrac{1}{\exp z} = \exp(-z)$.
— $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$.
— $\exp(z) = \exp(z') \Leftrightarrow z = z' \equiv 2i\pi$.

Groupe $(\mathbb{U}, \times)$. On note : $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1.\}$. $\mathbb{U}$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Racines n^{iemes} de l'unité, groupe $(\mathbb{U}_n, \times)$. Avec $n \geqslant 2$ et $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$:

— **Racines.** L'ensemble des racines n^{iemes} de 1 est l'ensemble $\mathbb{U}_n = \left\{\omega^k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in [\![0\,,\, n-1]\!]\right\}$. $\mathbb{U}_n$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$. Si z est racine de l'unité, $\overline{z}$ l'est aussi.
— **Somme.** $\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = 0$.
— **Produit.** $\prod_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = (-1)^{n-1}$.

Racines n^{iemes} d'un complexe non nul. Avec $n \geqslant 2$ et $z = re^{i\theta}$:

— **Racines.** L'ensemble des racines n^{iemes} de z est l'ensemble $\left\{\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}\right\}$.
— **Somme.** La somme des racines n^{iemes} de z vaut 0.
— **Produit.** Le produit des racines n^{iemes} de z vaut $(-1)^{n-1}z$.

Trigonométrie circulaire et hyperbolique

Formulaire

Addition. Pour tous réels a et b :

— $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.
— $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.
— $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.
— $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.

Duplication. Pour tout réel x :

— $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.
— $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - \sin^2 x$.
— $\tan(2x) = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ (sous réserve d'existence).

Transformation de sommes en produits. Pour tous réels a et b :

— $\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$.
— $\sin a \sin b = \dfrac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$.
— $\sin a \cos b = \dfrac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))$.

Tangente de l'arc moitié. Avec $t = \tan\dfrac{x}{2}$, on a : $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$.

Transformation de sommes en produits. Pour tous réels p et q :

— $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$.
— $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$.

Trigonométrie hyperbolique. Pour tout réel x :

— $\mathrm{ch}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.
— $\mathrm{sh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.
— $\mathrm{th}x = \dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.
— $\mathrm{sh}^2 x - \mathrm{ch}^2 x = 1$.

Fonctions usuelles

Formulaire

Remarque

Les propriétés les plus élémentaires des fonctions valeur absolue, exponentielle et logarithmes, issues du cours de Terminale S, ne sont pas reprises ici.

Partie entière.

— $E(x)$ est l'unique entier relatif tel que : $x - 1 < E(x) \leqslant x$. Pour tout réel x : $E(x) \leqslant x < E(x) + 1$.
— La fonction partie entière est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et continue à droite en tout point de $\mathbb{Z}$.

Valeur absolue.

— $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| = max(x, 0) + max(-x, 0)$.
— $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $max(a, b) = \dfrac{a + b + |a - b|}{2}$.

Exponentielle, logarithmes, puissances.

— Lorsque h est au voisinage de 0 : $e^h = 1 + h + \circ(h)$.
— Lorsque h est au voisinage de 0 : $\ln(1 + h) = h + \circ(h)$.
— $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}, x^y = e^{y \ln x}$.

Fonctions cos, sin, tan. Voir le formulaire de trigonométrie.

Fonctions *Arccos*, *Arcsin*, *Arctan*.

— La fonction cos induit une bijection croissante de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. La réciproque de cette restriction est la fonction $Arccos$: $\forall y \in [-1, 1], Arccos y = x \in [0, \pi] \,/\, \cos x = y$.

— La fonction sin induit une bijection croissante de $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$. La réciproque de cette restriction est la fonction $Arcsin$: $\forall y \in [-1, 1], Arcsin y = x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \,/\, \sin x = y$.

— La fonction tan induit une bijection croissante de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$ La réciproque de cette restriction est la fonction $Arctan$: $\forall y \in \mathbb{R}, Arctan y = x \in \mathbb{R}, \,/\, \tan x = y$.

— $\forall x \in]-1, 1[$, $Arccos'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $\forall x \in]-1, 1[$, $Arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $Arctan'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

Fonctions ch, sh, sh. Voir le formulaire de trigonométrie.

Fonctions *Argch*, *Argsh*, *Argth*.

— La fonction ch induit une bijection décroissante de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$. La réciproque de cette restriction est la fonction $Argch$: $\forall y \in [1, +\infty[, Argch y = x \in \mathbb{R}_+ \,/ \text{ch} x = y$.

— La fonction sh est une bijection croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. La réciproque de cette restriction est la fonction $Argsh$: $\forall y \in \mathbb{R}, Argsh y = x \in \mathbb{R} \,/ \text{sh} x = y$.

— La fonction induit une bijection croissante de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$ La réciproque de cette restriction est la fonction $Argsh$: $\forall y \in]-1, 1[, Argsh y = x \in \mathbb{R}, \,/ x = y$.

— $\forall x \in]1, +\infty[$, $Argch'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $Argsh'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$, $\forall x \in]-1, 1[$, $Argth'(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$.

Développements limités

Formulaire

Formule de Taylor avec reste intégral. Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b],\mathbb{R})$:

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Formule de Taylor-Lagrange. Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b],\mathbb{R})$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Inégalité de Taylor-Lagrange. Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b],\mathbb{R})$:

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t\in[a,b]} \left| f^{(n+1)}(t) \right|$$

Formule de Taylor-Young. Si $f \in \mathcal{C}^{n}([a,b],\mathbb{R})$, lorsque x est au voisinage de a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n).$$

Développements limités usuels. Lorsque x est au voisinage de 0 :

— $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^p \dfrac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1})$.
— $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^p \dfrac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p})$.
— $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$.
— $\mathrm{ch}x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$.
— $\mathrm{sh}x = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$.
— $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$.
— $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \ldots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$.
— $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n)$.
— $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$.

Développements limités et continuité, dérivabilité, fonction de classe $\mathcal{C}^n$. Si f est définie en a :

— f admet un d.l.(0) au voisinage de a si et seulement si f est continue en a.
— f admet un d.l.(1) au voisinage de a si et seulement si f est dérivable en a.
— Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de a, alors f admet un d.l.(n) au voisinage de a. La réciproque est fausse.

Développements limités et dérivée, primitive. Si f est définie en a et $n \geqslant 1$:

— Si f admet un d.l.(n) au voisinage de a, alors f' admet un d.l.($n-1$) au voisinage de a obtenu en dérivant terme à terme le d.l(n) de f en a.
— Si f admet un d.l.(n) au voisinage de a, alors toute primitive F de f admet un d.l.($n+1$) au voisinage de a obtenu en intégrant (à une constante près) le d.l.(n) de f en a.

Equations différentielles

Formulaire

Méthodes importantes.

D'une solution particulière à la solution complète. Si (L) est une équation linéaire, d'équation homogène associée (H), et si f_0 est une solution particulière de (L), alors (f est solution de (L)) $\Leftrightarrow$ ($f - f_0$ est solution de (H)).

Méthode de variation de la constante. On conserve les notations précédentes. But : trouver une solution particulière de (L). On trouve la solution générale de (H). On considère une solution particulière de (H), notée g_0, qui ne s'annule pas. Puis on cherche à quelle condition la fonction $f_0 : t \to \lambda(t)g_0(t)$ est solution de (L).

Principe de superposition des solutions. But : trouver une solution particulière de (L). Si le second membre d'une équation (L) est une somme de fonctions, on cherche des solutions particulières pour chacune des équations induites. La superposition (i.e. la somme) de toutes les solutions particulières est une solution particulière de (L).

Résolution des équations au programme sur un intervalle I.

Equation $y' + ay = 0$. $y' + ay = 0 \Leftrightarrow \forall t \in I,\ y(t) = \lambda e^{-A(t)}$, où A est une primitive de la fonction a, et où λ décrit $\mathbb{R}$.

Solution particulière de l'équation $y' + ay = p$, où p est un polynôme. Deux cas se présentent :

— Si $a \neq 0$, l'équation admet une solution polynomiale de degré n.
— Si $a = 0$, l'équation admet une solution polynomiale de degré $n + 1$.

Solution particulière de l'équation $y' + ay = p(t)e^{mt}$, où p est un polynôme. L'équation admet une solution particulière de la forme $t \mapsto q(t)e^{mt}$. Deux cas se présentent :

— Si $a \neq m,\ \deg q = n$.
— Si $a = m,\ \deg q = n + 1$.

Equation $ay'' + by' + cy = 0$, cas où a, b, c sont réels. On considère le discriminant Δ de l'équation caractéristique $(E) : ar^2 + br + c = 0$. Si $\Delta > 0$, (E) admet deux solutions réelles notées x_1 et x_2 ; si $\Delta = 0$, une unique solution notée x_0 ; si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées notées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$. Trois cas se présentent :

— Si $\Delta > 0 : ay'' + by' + cy = 0 \Leftrightarrow \forall t \in I,\ y(t) = \lambda e^{x_1 t} + \mu e^{x_2 t}$, où (λ, μ) décrit $\mathbb{R}^2$.
— Si $\Delta = 0 : ay'' + by' + cy = 0 \Leftrightarrow \forall t \in I,\ y(t) = (\lambda + \mu t)e^{x_0 t}$, où (λ, μ) décrit $\mathbb{R}^2$.
— Si $\Delta < 0 : ay'' + by' + cy = 0 \Leftrightarrow \forall t \in I,\ y(t) = \lambda e^{\alpha t}\cos(\beta t) + \mu e^{\alpha t}\sin(\beta t)$, où (λ, μ) décrit $\mathbb{R}^2$.

Equation $ay'' + by' + cy = 0$, cas où a, b, c sont complexes. On considère le discriminant Δ de l'équation caractéristique $(E) : ar^2 + br + c = 0$. Si $\Delta \neq 0$, (E) admet deux solutions complexes conjuguées notées x_1 et x_2 ; si $\Delta = 0$, une unique solution notée x_0. Deux cas se présentent :

— Si $\Delta \neq 0 : ay'' + by' + cy = 0 \Leftrightarrow \forall t \in I,\ y(t) = \lambda e^{x_1 t} + \mu e^{x_2 t}$, où (λ, μ) décrit $\mathbb{R}^2$.
— Si $\Delta = 0 : ay'' + by' + cy = 0 \Leftrightarrow \forall t \in I,\ y(t) = (\lambda + \mu t)e^{x_0 t}$, où (λ, μ) décrit $\mathbb{R}^2$.

Solution particulière de l'équation $ay'' + by' + cy = p$, où p est un polynôme. Trois cas se présentent :

— Si $c \neq 0$, l'équation admet une solution polynomiale de degré n.
— Si $c = 0$ et $b \neq 0$, l'équation admet une solution polynomiale de degré $n + 1$.
— Si $b = c = 0$, l'équation admet une solution polynomiale de degré $n + 2$.

Solution particulière de l'équation $ay'' + by' + cy = p(t)e^{mt}$, où p est un polynôme. L'équation admet une solution particulière de la forme $t \mapsto q(t)e^{mt}$. En notant (E) l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$, trois cas se présentent :

— Si m n'est pas racine de $(E),\ \deg q = n$.
— Si m est racine simple de $(E),\ \deg q = n + 1$.
— Si m est racine double de $(E),\ \deg q = n + 2$.

Intégration sur un segment

Formulaire

Définition théorique. L'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est définie comme la valeur commune de (1) : la borne supérieure de l'ensemble des intégrales des fonctions en escalier minorant f, et (2) : la borne inférieure de l'ensemble des intégrales des fonctions en escalier majorant f.

Primitive et Intégrale. Toute fonction continue sur $[a, b]$ y admet une primitive, notée F. $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.
Toute fonction de la forme $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, où $a \in \mathbb{R}$, est une primitive de f s'annulant en a. Si f est continue, F est de classe $\mathcal{C}^1$.

Propriétés de l'intégration. f et g sont continues par morceaux sur $[a, b]$.

— **Chasles.** $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

— **Linéarité.** $\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\,\mathrm{d}t = \alpha \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

— **Positivité.** Si $a \leqslant b$: si f est positive, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

— **Croissance.** Si $a \leqslant b$: si $\forall t \in [a, b], f(t) \leqslant g(t)$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

— **Intégrale nulle.** Si f est continue et positive sur $[a, b]$: $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Rightarrow \forall t \in [a, b], f(t) = 0$.

Intégration par parties. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$: $\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$.

Changement de variable.

— "$u = \varphi(t)$". Si φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$: $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u$.

— "$t = \varphi(u)$". Si φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$, avec $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$, alors : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$.

Sommes de Riemann. Si f est continue sur $[a, b]$, alors :

— $s_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

— $S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

En particulier pour $a = 0$ et $b = 1$: $\frac{1}{n} \sum_{k=0 \text{ ou } 1}^{n-1 \text{ ou } n} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Valeur moyenne. $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est la valeur moyenne de f sur $[a, b]$. $\exists c \in]a, b[, \mu = f(c)$.

Fonctions : limites et continuité

Formulaire

Limite finie en un point. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\alpha>0, \forall x\in\mathcal{D}_f,\ |x-x_0|<\alpha \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$.

Limite infinie en un point. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall A>0, \exists\alpha>0, \forall x\in\mathcal{D}_f,\ |x-x_0|<\alpha \Rightarrow f(x)>A$.

Limite finie en $+\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell \Leftrightarrow \forall A>0, \exists x_0\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathcal{D}_f, x>x_0 \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$.

Limite infinie en $+\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall A>0, \exists x_0\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathcal{D}_f, x>x_0 \Rightarrow f(x)>A$.

Définitions analogues pour des limites en un point à gauche, à droite, ou en en $-\infty$, ou des limites égales à $-\infty$.

Caractérisation séquentielle. $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\ell$ si et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\alpha$, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Croissance. f est croissante sur I si : $\forall(x,y)\in I^2$, $(x\leqslant y)\Rightarrow f(x)\leqslant f(y)$.
Définitions analogues pour la stricte croissance, la décroissance, la stricte décroissance.

Théorème les plus importants sur les limites.

- **Théorème de la limite monotone.** Toute fonction croissante sur $]a,b[$ admet en a une limite à droite, finie ou égale à $-\infty$; en b une limite à gauche, finie ou égale à $+\infty$; et en tout point $x_0\in]a,b[$, une limite finie à droite et une limite à gauche. Résultats analogues pour les fonctions décroissantes.
- **Théorème de l'encadrement.** Si au voisinage de x_0 : $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$, et si les fonctions f et g admettent une limite finie commune ℓ en x_0, alors la fonction g admet pour limite ℓ en x_0.
- **Théorème de prolongement des inégalités.** Si au voisinage de x_0 : $f(x)\leqslant g(x)$, et si les fonctions f et g admettent en x_0 une limite finie, respectivement égales à ℓ et ℓ', alors : $\ell\leqslant\ell'$.

Comparaison de fonctions.

- **Fonctions négligeables.** f est négligeable devant g au voisinage de x_0, et l'on note $f(x)=o(g(x))$, si il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 et une fonction ε de limite nulle telles que pour tout $x\in\mathcal{V}$, $f(x)=\varepsilon(x)g(x)$.
- **Fonctions équivalentes.** f est équivalente à g lorsque au voisinage de x_0, et l'on note $f(x)\underset{x_0}{\sim} g(x)$, si $f(x)-g(x)=o(g(x))$, i.e. si il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 tel que pour tout $x\in\mathcal{V}$, $f(x)=h(x)g(x)$, où $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=1$.

Equivalents usuels.

- $\ln(1+x)\underset{0}{\sim} x$.
- $\ln u\underset{1}{\sim} u-1$.
- $e^x-1\underset{0}{\sim} x$.
- $(1+x)^\alpha-1\underset{0}{\sim}\alpha x$.
- $\sin x\underset{0}{\sim} x$.
- $\cos x-1\underset{0}{\sim}-\dfrac{x^2}{2}$.

Continuité. f est continue en x_0 si : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, i.e. : $\forall\varepsilon>0, \exists\alpha>0, \forall x\in\mathcal{D}_f, |x-x_0|<\alpha\Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. f est continue sur I si f est continue en tout point de I. Les opérations élémentaires conservent la continuité. Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes sur se ce segment.

Théorème des valeurs intermédiaires. Si f est continue sur $[a,b]$, alors pour toute valeur intermédiaire λ strictement comprise entre $f(a)$ et $f(b)$: $\exists c\in]a,b[, f(c)=\lambda$. Si f est strictement monotone, cette solution est unique (théorème dit "de la bijection"). La fonction réciproque f^{-1} est alors continue et de même monotonie que f.

Fonctions lipschitziennes. f est k-lipschitzienne sur I si $\forall(x,y)\in I^2, |f(x)-f(y)|\leqslant k\,|x-y|$. Toute fonction lipschitzienne est continue.