ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ANALYSE ENONCE NUMERO 2

1)

Soit x un réel. Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t}dt$ est convergente si et seulement si $x > 0$. On pose alors

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t}dt$$

L'exercice a pour but l'étude de la fonction F.

2)

Etudier le sens de variation de F sur $]0, +\infty[$.

3–a)

Démontrer que, pour tout $x > 0$, on a $F(x) \geq \frac{1}{e}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t}dt$. En déduire la limite de F en 0.

b) Démontrer que, pour tout réel $x > 0$, on a : $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{x}+u}du$.

En déduire la limite de F en $+\infty$.

4)

Prouver que pour tous x_0 et x, réels strictement positifs, on a :

$$\Big|F(x) - F(x_0)\Big| \leq \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}|}{\sqrt{x}\sqrt{x_0}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

En déduire que F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

5)

Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x}F(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{2}) = -\frac{1}{2}$.

En déduire que $F(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2x} + o(\frac{1}{x})$ au voisinage de $+\infty$.

Donner un équivalent de $F(x)$ au voisinage de $+\infty$.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

CORRIGE EXO D'ANALYSE NUMERO 2

1)

La fonction $t \mapsto \dfrac{\exp(-xt^2)}{1+t}$ est continue sur $[0,+\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\exp(-xt^2)}{1+t}dt$ est impropre uniquement en $+\infty$.

- $x \leq 0 \Longrightarrow \exp(-xt^2) \geq 1$ puisque $-xt^2 \geq 0$. Donc en multipliant cette inégalité par $\dfrac{1}{1+t} > 0$, il vient $\dfrac{\exp(-xt^2)}{1+t} \geq \dfrac{1}{1+t}$.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t}dt$ est divergente sans problème. Par minoration, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\exp(-xt^2)}{1+t}dt$ est divergente.

- $x > 0$. $t \geq 1 \Longrightarrow t^2 \geq t$, donc $-xt^2 \leq -xt$. Puis par croissance de l'exponentielle, $0 < \exp(-xt^2) \leq \exp(-xt)$.

De plus $0 < \dfrac{1}{1+t} \leq 1$. On multiplie terme à terme ces deux inégalités entre termes positifs et on obtient : $0 < \dfrac{\exp(-xt^2)}{1+t} \leq \exp(-xt)$. **(1)**

La fonction $t \mapsto x\exp(-xt)$ sur $\mathbb{R}_+$ et 0 ailleurs est une densité de la loi exponentielle de paramètre x. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\exp(-xt)dt$ converge.

L'inégalité (1) permet de conclure (par comparaison des fonctions continues positives) que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\exp(-xt^2)}{1+t}dt$ est convergente.

$\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\exp(-xt^2)}{1+t}dt \text{ converge si et seulement si } x > 0. \text{ La fonction } F \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+^*}$

2)

Soit $0 < x < y$. Alors $-yt^2 \leq -xt^2$ puisque $-t^2 \leq 0$. Par croissance de l'exponentielle, $\exp(-yt^2) \leq \exp(-xt^2)$. On multiplie par $\dfrac{1}{1+t} > 0$, il vient

$\dfrac{\exp(-yt^2)}{1+t} \leq \dfrac{\exp(-xt^2)}{1+t}$. On intègre entre 0 et $+\infty$, les bornes sont dans l'ordre croissant On obtient donc

$$\boxed{\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^2),\ x < y \Longrightarrow F(x) \geq F(y) \text{ : la fonction } F \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+^*}$$

3–a)

Puisque $\dfrac{\exp(-xt^2)}{1+t} > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty}\frac{\exp(-xt^2)}{1+t}dt \geq 0$. Cela veut dire que, par relation de Chasles pour les intégrales convergentes, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\exp(-xt^2)}{1+t}dt - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\frac{\exp(-xt^2)}{1+t}dt \geq 0$.

$$\int_0^{+\infty}\frac{\exp(-xt^2)}{1+t}dt \geq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\frac{\exp(-xt^2)}{1+t}dt \qquad \textbf{(3.a)}$$

Dans cette deuxième intégrale, $0 \leq t \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}} \Longrightarrow 0 \leq t^2 \leq \dfrac{1}{x}$ (par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$), donc $-xt^2 \geq -1$.

Puis par croissance de l'exponentielle, $\exp(-xt^2) \geq \exp(-1) = \dfrac{1}{e}$.

Multiplions cette inégalité par $\dfrac{1}{1+t} > 0$, il vient $\dfrac{\exp(-xt^2)}{1+t} \geq \dfrac{1}{e}\dfrac{1}{1+t}$.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.