ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ANALYSE ENONCE NUMERO 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n$ des réels non tous nuls. On considère les fonctions f, g, h définies pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ par

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i \ ; \ g(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \text{ et } h(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

1–a)

Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$. Déterminer son gradient en tout point x de $\mathbb{R}^n$.

b) Prouver que f admet un maximum sur la sphère unité S de $\mathbb{R}^n$ définie par

$$S = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1\}$$

c) Déterminer le maximum de f sur S.

d) En déduire que pour tout point $u = (u_1, \ldots, u_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on a

$$\Big|\prod_{i=1}^{n} u_i\Big| \leq \Big(\frac{||u||}{\sqrt{n}}\Big)^n$$

où $||.||$ désigne la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^n$.

2–a)

Soit $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $a_i \neq 0$. On pose

$$H = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ h(x) = 1\} \text{ et } B = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ ||x|| \leq \frac{1}{|a_i|}\}$$

Prouver que l'ensemble $H \cap B$ est non vide puis que c'est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$.

b) Justifier que la fonction g admet un minimum sur $B \cap H$. Prouver que ce minimum est aussi le minimum de g sous la contrainte $h(x) = 1$.

c) Déterminer le minimum de g sur H.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.