ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

PROBABILITE ENONCE NUMERO 2

1)

On admet que $\forall x \in [0,1[,\ \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

Calculer, pour $x \in [0,1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$.

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et suivant la même loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$.

2)

Dans cette question m désigne un entier naturel non nul fixé. Pour tout $\omega \in \Omega$, on range les nombres $X_0(\omega), X_1(\omega), \ldots, X_m(\omega)$ par ordre ***décroissant*** pour obtenir une nouvelle séquence notée $Y_0(\omega), Y_1(\omega), \ldots, Y_m(\omega)$. Ainsi, en particulier,

$$Y_0(\omega) = \sup\{X_k(\omega),\ 0 \leq k \leq m\} \text{ et } Y_m(\omega) = \inf\{X_k(\omega),\ 0 \leq k \leq m\}$$

a) Déterminer la fonction de répartition Φ_0 et une densité φ_0 de Y_0.

a) Déterminer la fonction de répartition Φ_m et une densité φ_m de Y_m.

3)

Soit X et Y deux variables aléatoires à densité définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, de densités respectives f et g, de fonctions de répartition respectives F et G.

a) Déterminer une densité de $-Y$.

b) On admet que si $h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ est une fonction de deux variables, on a

$$\int_0^{+\infty} \Big[\int_{-\infty}^{+\infty} h(x,t)dt\Big]dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big[\int_0^{+\infty} h(x,t)dx\Big]dt,$$

sous réserve que toutes les intégrales écrites convergent.

Montrer que $P(Y \leq X) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x)f(x)dx$.

4)

a) On considère la variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$ définie par : $\forall \omega \in \Omega$,

$$X_N(\omega) = \begin{cases} \text{le plus petit des indices } k \text{ tels que} X_k(\omega) > X_0(\omega), & \text{si ce nombre existe} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer la loi de N et vérifier que $P(N=0) = 0$. La variable aléatoire N admet-elle une espérance ?

b) Déterminer la fonction de répartition Ψ et une densité ψ de X_N.

c) Montrer que X_N admet une espérance et déterminer sa valeur.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

CORRIGE EXO DE PROBABILITE NUMERO 2

1)

$\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

$\forall x \in [0,1[,\ \dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x\dfrac{x^n}{n} - \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$. . Les deux séries sont convergentes donc

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} &= x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\\ &= x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} - \sum_{j=2}^{+\infty}\frac{x^j}{j}\\ &= -x\ln(1-x) - \Big(-\ln(1-x) - x\Big)\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in [0,1[,\ \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = (1-x)\ln(1-x) + x}$$

2)

a)

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi_0(x) &= P(\sup_{0\le k\le m} X_k \le x)\\ &= P\Big(\bigcap_{k=0}^{m}(X_k \le x)\Big) = \prod_{k=0}^{m} P(X_k \le x) \quad \text{par indépendance des variables}\\ &= P(X_1 \le x)^{m+1} \quad \text{car les variables suivent la même loi.}\end{aligned}$$

- Si $x < 0,\ P(X_1 \le x) = 0$, donc $\Phi_0(x) = 0$.
- Si $x \ge 0,\ P(X_1 \le x) = 1 - e^{-\alpha x}$ d'après la loi exponentielle de paramètre α, donc

$$\boxed{\begin{array}{l}\Phi_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0\\ \Big(1-e^{-\alpha x}\Big)^{m+1} & \text{si } x \ge 0\end{cases}\\ \text{On pourra prendre comme densité } \varphi_0 \text{ de } Y_0 :\\ \varphi_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0\\ (m+1)\alpha e^{-\alpha x}\Big(1-e^{-\alpha x}\Big)^{m} & \text{si } x \ge 0\end{cases}\end{array}}$$

b)

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi_m(x) &= P(\inf_{0\le k\le m} X_k \le x)\\ &= 1 - P(\inf_{0\le k\le m} X_k > x)\\ &= 1 - P(\bigcap_{k=0}^{m} X_k > x) = 1 - \prod_{k=0}^{m} P(X_k > x)\\ &= 1 - \Big(P(X_1 > x)\Big)^{m+1} \quad \text{arguments déjà donnés}\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\Phi_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \quad \text{car } P(X_1 > x) = 1\\ 1 - e^{-\alpha(m+1)x} & \text{si } x \ge 0\end{cases}\\ Y_m \text{ suit la loi exponentielle de paramètre } (m+1)\alpha\end{array}}$$

3)

a)

$\forall x \in \mathbb{R},\ P(-Y \le x) = P(Y \ge -x) = 1 - P(Y < -x) = 1 - F_Y(-x)$ car Y est une variable à densité.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_{-Y}(x) = 1 - F_Y(-x).$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.