ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

PROBABILITE ENONCE NUMERO 2

1)

On admet que $\forall x \in [0,1[,\ \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

Calculer, pour $x \in [0,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$.

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et suivant la même loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$.

2)

Dans cette question m désigne un entier naturel non nul fixé. Pour tout $\omega \in \Omega$, on range les nombres $X_0(\omega), X_1(\omega), \ldots, X_m(\omega)$ par ordre ***décroissant*** pour obtenir une nouvelle séquence notée $Y_0(\omega), Y_1(\omega), \ldots, Y_m(\omega)$. Ainsi, en particulier,

$$Y_0(\omega) = \sup\{X_k(\omega),\ 0 \leq k \leq m\} \text{ et } Y_m(\omega) = \inf\{X_k(\omega),\ 0 \leq k \leq m\}$$

a) Déterminer la fonction de répartition Φ_0 et une densité φ_0 de Y_0.

a) Déterminer la fonction de répartition Φ_m et une densité φ_m de Y_m.

3)

Soit X et Y deux variables aléatoires à densité définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, de densités respectives f et g, de fonctions de répartition respectives F et G.

a) Déterminer une densité de $-Y$.

b) On admet que si $h\ :\ \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ est une fonction de deux variables, on a

$$\int_0^{+\infty} \Big[\int_{-\infty}^{+\infty} h(x,t)dt\Big]dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big[\int_0^{+\infty} h(x,t)dx\Big]dt,$$

sous réserve que toutes les intégrales écrites convergent.

Montrer que $P(Y \leq X) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x)f(x)dx$.

4)

a) On considère la variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$ définie par : $\forall \omega \in \Omega$,

$$X_N(\omega) = \begin{cases} \text{le plus petit des indices } k \text{ tels que} X_k(\omega) > X_0(\omega), & \text{si ce nombre existe} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer la loi de N et vérifier que $P(N = 0) = 0$. La variable aléatoire N admet-elle une espérance ?

b) Déterminer la fonction de répartition Ψ et une densité ψ de X_N.

c) Montrer que X_N admet une espérance et déterminer sa valeur.

CORRIGE EXO DE PROBABILITE NUMERO 2

1)

$\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

$\forall x \in [0,1[,\ \dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x\dfrac{x^n}{n} - \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$. . Les deux séries sont convergentes donc

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} &= x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\\ &= x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} - \sum_{j=2}^{+\infty}\frac{x^j}{j}\\ &= -x\ln(1-x) - \Big(-\ln(1-x) - x\Big)\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in [0,1[,\ \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = (1-x)\ln(1-x) + x}$$

2)

a)

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi_0(x) &= P(\sup_{0\le k\le m} X_k \le x)\\ &= P\Big(\bigcap_{k=0}^{m}(X_k \le x)\Big) = \prod_{k=0}^{m} P(X_k \le x) \quad \text{par indépendance des variables}\\ &= P(X_1 \le x)^{m+1} \quad \text{car les variables suivent la même loi.}\end{aligned}$$

- Si $x < 0$, $P(X_1 \le x) = 0$, donc $\Phi_0(x) = 0$.
- Si $x \ge 0$, $P(X_1 \le x) = 1 - e^{-\alpha x}$ d'après la loi exponentielle de paramètre α, donc

$$\Phi_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \Big(1 - e^{-\alpha x}\Big)^{m+1} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

On pourra prendre comme densité φ_0 de Y_0 :

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (m+1)\alpha e^{-\alpha x}\Big(1 - e^{-\alpha x}\Big)^m & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

b)

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi_m(x) &= P(\inf_{0\le k\le m} X_k \le x)\\ &= 1 - P(\inf_{0\le k\le m} X_k > x)\\ &= 1 - P(\bigcap_{k=0}^{m} X_k > x) = 1 - \prod_{k=0}^{m} P(X_k > x)\\ &= 1 - \Big(P(X_1 > x)\Big)^{m+1} \quad \text{arguments déjà donnés}\end{aligned}$$

$$\Phi_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \quad \text{car } P(X_1 > x) = 1 \\ 1 - e^{-\alpha(m+1)x} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

Y_m suit la loi exponentielle de paramètre $(m+1)\alpha$

3)

a)

$\forall x \in \mathbb{R},\ P(-Y \le x) = P(Y \ge -x) = 1 - P(Y < -x) = 1 - F_Y(-x)$ car Y est une variable à densité.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_{-Y}(x) = 1 - F_Y(-x).$$