



## ORAL DE MATHÉMATIQUES

HEC ESCP

## PROBABILITÉ ENONCE NUMERO 2

1) \_\_\_\_\_

On admet que  $\forall x \in [0, 1[, \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ .

Calculer, pour  $x \in [0, 1[, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ .

Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , mutuellement indépendantes et suivant la même loi exponentielle de paramètre  $\alpha > 0$ .

2) \_\_\_\_\_

Dans cette question  $m$  désigne un entier naturel non nul fixé. Pour tout  $\omega \in \Omega$ , on range les nombres  $X_0(\omega), X_1(\omega), \dots, X_m(\omega)$  par ordre *décroissant* pour obtenir une nouvelle séquence notée  $Y_0(\omega), Y_1(\omega), \dots, Y_m(\omega)$ . Ainsi, en particulier,

$$Y_0(\omega) = \sup\{X_k(\omega), 0 \leq k \leq m\} \text{ et } Y_m(\omega) = \inf\{X_k(\omega), 0 \leq k \leq m\}$$

a) Déterminer la fonction de répartition  $\Phi_0$  et une densité  $\varphi_0$  de  $Y_0$ .

a) Déterminer la fonction de répartition  $\Phi_m$  et une densité  $\varphi_m$  de  $Y_m$ .

3) \_\_\_\_\_

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires à densité définies sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , indépendantes, de densités respectives  $f$  et  $g$ , de fonctions de répartition respectives  $F$  et  $G$ .

a) Déterminer une densité de  $-Y$ .

b) On admet que si  $h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$  est une fonction de deux variables, on a

$$\int_0^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, t) dt \right] dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_0^{+\infty} h(x, t) dx \right] dt,$$

sous réserve que toutes les intégrales écrites convergent.

Montrer que  $P(Y \leq X) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x)f(x)dx$ .

4) \_\_\_\_\_

a) On considère la variable aléatoire  $N$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  définie par :  $\forall \omega \in \Omega$ ,

$$X_N(\omega) = \begin{cases} \text{le plus petit des indices } k \text{ tels que } X_k(\omega) > X_0(\omega), & \text{si ce nombre existe} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer la loi de  $N$  et vérifier que  $P(N = 0) = 0$ . La variable aléatoire  $N$  admet-elle une espérance ?

b) Déterminer la fonction de répartition  $\Psi$  et une densité  $\psi$  de  $X_N$ .

c) Montrer que  $X_N$  admet une espérance et déterminer sa valeur.

**CORRIGE EXO DE PROBABILITE NUMERO 2**
**1)**

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

$\forall x \in [0, 1[$ ,  $\frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x \frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}$ . Les deux séries sont convergentes donc

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} &= x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{x^j}{j} \\ &= -x \ln(1-x) - (-\ln(1-x) - x) \end{aligned}$$

$$\forall x \in [0, 1[, \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = (1-x) \ln(1-x) + x$$

**2)**
**a)**

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \Phi_0(x) &= P\left(\sup_{0 \leq k \leq m} X_k \leq x\right) \\ &= P\left(\bigcap_{k=0}^m (X_k \leq x)\right) = \prod_{k=0}^m P(X_k \leq x) \quad \text{par indépendance des variables} \\ &= P(X_1 \leq x)^{m+1} \quad \text{car les variables suivent la même loi.} \end{aligned}$$

- Si  $x < 0$ ,  $P(X_1 \leq x) = 0$ , donc  $\Phi_0(x) = 0$ .
- Si  $x \geq 0$ ,  $P(X_1 \leq x) = 1 - e^{-\alpha x}$  d'après la loi exponentielle de paramètre  $\alpha$ , donc

$$\Phi_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - e^{-\alpha x})^{m+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On pourra prendre comme densité  $\varphi_0$  de  $Y_0$  :

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (m+1)\alpha e^{-\alpha x} (1 - e^{-\alpha x})^m & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

**b)**

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \Phi_m(x) &= P\left(\inf_{0 \leq k \leq m} X_k \leq x\right) \\ &= 1 - P\left(\inf_{0 \leq k \leq m} X_k > x\right) \\ &= 1 - P\left(\bigcap_{k=0}^m X_k > x\right) = 1 - \prod_{k=0}^m P(X_k > x) \\ &= 1 - \left(P(X_1 > x)\right)^{m+1} \quad \text{arguments déjà donnés} \end{aligned}$$

$$\Phi_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\alpha(m+1)x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{car } P(X_1 > x) = 1 - e^{-\alpha x}$$

$Y_m$  suit la loi exponentielle de paramètre  $(m+1)\alpha$

**3)**
**a)**

$\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $P(-Y \leq x) = P(Y \geq -x) = 1 - P(Y < -x) = 1 - F_Y(-x)$  car  $Y$  est une variable à densité.

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_{-Y}(x) = 1 - F_Y(-x).$$