



ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

PROBABILITE ENONCE NUMERO 6

1) _____

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) et suivant la loi normale centrée réduite. Soit $Y = X^2$.

- Montrer que Y est une variable à densité dont on donnera une densité.
- Montrer que Y admet une espérance et une variance et déterminer ces deux moments.
- Quelle est la loi de $\frac{1}{2}Y^2$.

2) _____

On considère l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 dont la matrice relativement à la base canonique de \mathbb{R}^3 est $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Montrer que f est un projecteur orthogonal dont on précisera les éléments caractéristiques.

3) _____

Un point M , extrémité d'un vecteur V , est placé de manière aléatoire dans l'espace \mathbb{R}^3 , rapporté à un repère orthonormé.

L'espace \mathbb{R}^3 est muni de sa structure euclidienne canonique (on note $\|\cdot\|$ la norme associée).

On suppose que les coordonnées (X, Y, Z) de M sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent chacune la loi normale centrée réduite.

- Déterminer la loi de la variable aléatoire $\frac{1}{2}\|V\|^2 = \frac{1}{2}\|\vec{OM}\|^2$.
- Soit \mathcal{P} le plan d'équation $x + y + z = 0$. On note D la variable aléatoire égale à la distance de M au plan \mathcal{P} .
Montrer que D est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.
- Quelle est la distance moyenne de M au plan \mathcal{P} ?