ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

PROBABILITE ENONCE NUMERO 8

On dispose de n variables aléatoires indépendantes ($n \geq 2$), notées $X_1 \ldots, X_n$ de même loi de Poisson de paramètre θ inconnu ($\theta \in]0, +\infty[$) et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On souhaite exprimer $\exp(-\theta)$.

On définit pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la variable aléatoire Y_i par :

$$Y_i(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i(\omega) = 0 \\ 0 & \text{si } X_i(\omega) \neq 0 \end{cases}$$

On pose $\overline{Y_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

1)

a) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, donner la loi de Y_i.

b) Quelle est la loi de $n\overline{Y_n}$? Que vaut l'espérance de $\overline{Y_n}$?

c) Calculer la variance $\mathrm{Var}\,(\overline{Y_n})$. Conclusion ?

2)

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$.

a) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, rappeler la loi de S_k.

Pour tout entier naturel j, on pose $\varphi(j) = P_{(S_n=j)}(X_1 = 0)$.

b) Montrer que pour tout entier naturel j on a : $\varphi(j) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^j$.

On peut ainsi définir l'estimateur $\varphi(S_n) = (1 - \frac{1}{n})^{S_n}$.

c) Montrer que $\varphi(S_n)$ admet une espérance et que $E(\varphi(S_n)) = \exp(-\theta)$.

d) Montrer que $\varphi(S_n)$ admet une variance et que

$$\mathrm{Var}\,(\varphi(S_n)) = \exp(-2\theta)\Big(\exp(\tfrac{\theta}{n}) - 1\Big).$$

Conclusion ?

3)

On souhaite ici comparer les ≪ performances ≫ de $\overline{Y_n}$ et $\varphi(S_n)$ en tant qu'estimateur de $\exp(-\theta)$.

a) On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\exp(\frac{\theta}{n}) \leq \frac{\exp(\theta)}{n} + \frac{n-1}{n}$.

Montrer que : $\mathrm{Var}\,(\varphi(S_n)) \leq \mathrm{Var}\,(\overline{Y_n})$.

b) Comparer les risques quadratiques de $(\overline{Y_n})$ et $\varphi(S_n)$.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.