



ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

PROBABILITE ENONCE NUMERO 10

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre 1.

On définit une suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n \geq 1}$ par

$$Y_1 = X_1 \text{ et pour tout entier } n \geq 1, Y_{n+1} = Y_n + \frac{1}{n+1} X_{n+1}$$

1) _____

Quelle est la loi de $\frac{1}{n} X_n$?

2-a) _____

Déterminer une densité f_2 de Y_2 .

b) Les variables Y_n et $\frac{1}{n+1} X_{n+1}$ sont-elles indépendantes ?

c) Déterminer une densité de la variable Y_n .

3) _____

En déduire que Y_n et $Z_n = \sup (X_1, X_2, \dots, X_n)$ suivent la même loi.

4) _____

Déterminer la limite en probabilité de la suite $(\frac{Y_n}{n})_{n \geq 1}$.