ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ALGEBRE ENONCE NUMERO 9

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit E un $\mathbb{C}-$espace vectoriel de dimension n. Soit s un endomorphisme de E vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

(ii) $s \neq \mathrm{Id}_E$.

(iii) $s \neq -\mathrm{Id}_E$.

On considère l'application φ définie sur $\mathcal{L}(E)$ par :

$$\forall f \in \mathcal{L}(E),\ \varphi(f) = \frac{1}{2}(s \circ f + f \circ s)$$

1)

Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

2)

Montrer que s est diagonalisable et que son spectre est égal à $\{-1, 1\}$.

On notera dans la suite E_1 (resp. E_{-1}) le sous-espace propre de s associé à la valeur propre 1 (resp. -1).

3)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence suivante :

$$f \in \operatorname{Ker} \varphi \Longleftrightarrow f(E_1) \subset E_{-1} \text{ et } f(E_{-1}) \subset E_1$$

4)

Soit λ une valeur propre de φ et soit f un vecteur propre associé.

Pour $x \in E_1$, déterminer une relation entre $f(x)$ et $s(f(x))$. Même question pour $x \in E_{-1}$.

5)

Montrer que le spectre de φ est inclus dans $\{-1, 0, 1\}$

6)

Déterminer un polynôme P annulateur de φ de coefficient dominant égal à 1 et de degré 3.

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.