



## ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

## ALGEBRE ENONCE NUMERO 9

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2. Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . Soit  $s$  un endomorphisme de  $E$  vérifiant les propriétés suivantes :

(i)  $s \circ s = \text{Id}_E$ .

(ii)  $s \neq \text{Id}_E$ .

(iii)  $s \neq -\text{Id}_E$ .

On considère l'application  $\varphi$  définie sur  $\mathcal{L}(E)$  par :

$$\forall f \in \mathcal{L}(E), \varphi(f) = \frac{1}{2}(s \circ f + f \circ s)$$

1) \_\_\_\_\_

Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathcal{L}(E)$ .

2) \_\_\_\_\_

Montrer que  $s$  est diagonalisable et que son spectre est égal à  $\{-1, 1\}$ .

*On notera dans la suite  $E_1$  (resp.  $E_{-1}$ ) le sous-espace propre de  $s$  associé à la valeur propre 1 (resp.  $-1$ ).*

3) \_\_\_\_\_

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer l'équivalence suivante :

$$f \in \text{Ker } \varphi \iff f(E_1) \subset E_{-1} \text{ et } f(E_{-1}) \subset E_1$$

4) \_\_\_\_\_

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $\varphi$  et soit  $f$  un vecteur propre associé.

Pour  $x \in E_1$ , déterminer une relation entre  $f(x)$  et  $s(f(x))$ . Même question pour  $x \in E_{-1}$ .

5) \_\_\_\_\_

Montrer que le spectre de  $\varphi$  est inclus dans  $\{-1, 0, 1\}$

6) \_\_\_\_\_

Déterminer un polynôme  $P$  annulateur de  $\varphi$  de coefficient dominant égal à 1 et de degré 3.