



ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ALGEBRE ENONCE NUMERO 10

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soit (u, v) une famille libre de deux vecteurs de \mathbb{R}^n , U et V les matrices colonnes canoniquement associées à u et v et α un réel non nul.

I_n désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) _____

On considère la matrice $A = I_n + \alpha U^t U$ et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé à A .

a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f . L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

b) Soit Q une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que ses valeurs propres réelles, s'il y en a, appartiennent à $\{-1, 1\}$.

c) Pour quelle(s) valeur(s) de α la matrice A est-elle orthogonale ?

2) _____

Dans cette question, on considère la matrice $B = I_n + U^t V + V^t U$ et g l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé à B .

a) Montrer qu'un vecteur x de \mathbb{R}^n de matrice colonne canoniquement associée X est vecteur propre de g associé à la valeur propre λ si et seulement si

$$(\lambda - 1)x = \langle x, u \rangle v + \langle x, v \rangle u \text{ où } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ est le produit scalaire canonique de } \mathbb{R}^n.$$

b) En déduire les valeurs propres de g . L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?