ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ALGEBRE ENONCE NUMERO 11

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit $A = (a_{i,j})$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i+j = n+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \text{ soit } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & \iddots & \iddots & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à A dans la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

1)

Montrer que u est diagonalisable.

2)

Dans cette question n est pair et on écrit $n = 2p$.

a) Montrer qu'il existe des plans vectoriels $F_1, \dots, F_p$, stables par u, tels que l'on ait $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i = \mathbb{R}^n$.

b) En déduire les valeurs propres de u ainsi qu'une base orthonormée de vecteurs propres de u.

3)

Dans cette question, n est impair et on écrit $n = 2p+1$. Déterminer les éléments propres de u.

4)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & \iddots & \iddots & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que A n'est pas diagonalisable.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

5)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

A quelles conditions la matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$?

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.