ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ALGEBRE ENONCE NUMERO 11

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit $A = (a_{i,j})$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i+j = n+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \text{ soit } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & \iddots & \iddots & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à A dans la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

1)

Montrer que u est diagonalisable.

2)

Dans cette question n est pair et on écrit $n = 2p$.

a) Montrer qu'il existe des plans vectoriels $F_1, \dots, F_p$, stables par u, tels que l'on ait $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i = \mathbb{R}^n$.

b) En déduire les valeurs propres de u ainsi qu'une base orthonormée de vecteurs propres de u.

3)

Dans cette question, n est impair et on écrit $n = 2p+1$. Déterminer les éléments propres de u.

4)

$$\text{On considère la matrice } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & \iddots & \iddots & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Montrer que A n'est pas diagonalisable.

5)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

A quelles conditions la matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$?