



ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ALGEBRE ENONCE NUMERO 12

Soit un entier naturel $n \geq 2$ et E un espace vectoriel réel de dimension n . Soit f un endomorphisme de E , non nul, nilpotent, ce qui signifie qu'il existe $p \geq 2$ tel que $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$.

1) _____

Montrer que $p \leq n$.

2) _____

On suppose dans cette question uniquement que $p = n$. Résoudre l'équation $u^2 = f$, d'inconnue u , endomorphisme de E .

3) _____

Déterminer les valeurs propres de f . L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

4) _____

Soit g un endomorphisme de E .

a) Montrer qu'il existe un polynôme Q , annulateur de g , dont les racines sont exclusivement les valeurs propres de g .

b) Montrer que dans l'ensemble des polynômes annulateurs (non nuls) de g , il existe un polynôme de degré minimal. Quel lien existe-t-il entre ce polynôme et Q ?

c) On suppose que g ne possède que 0 comme valeur propre. Montrer que g est nilpotent.