



ORAL DE MATHÉMATIQUES

HEC ESCP

ANALYSE ENONCE NUMERO 10

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'application f_n définie comme suit :

$$f_n :]n, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{1}{x-k}$$

1) _____

Soit A un réel fixé strictement positif. Montrer que pour tout entier n l'équation $f_n(x) = A$ admet une unique solution que l'on notera x_n .

2) _____

Déterminer la limite de la suite $(x_n)_{n \geq 0}$.

3-a) _____

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(n+1)$.

En déduire qu'il existe un entier n_1 tel que $\forall n \geq n_1, x_n > n+1$.

b) Plus généralement, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe un rang n_k tel que $\forall n \geq n_k, x_n > n+k$.

4) _____

Montrer que pour tout entier naturel $n \geq n_1$,

$$\int_{x_n-n}^{x_n+1} \frac{dt}{t} \leq A \leq \int_{x_n-n-1}^{x_n} \frac{dt}{t}$$

5-a) _____

Montrer que la suite $(\frac{x_n}{n})_{n \geq 1}$ est convergente et exprimer sa limite en fonction de A .

b) Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{1}{x_n}$.