ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ANALYSE ENONCE NUMERO 11

1–a)

Déterminer l'ensemble D' des réels α tels que l'intégrale $G(\alpha) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha}$ converge.

b) Déterminer l'ensemble D des réels α tels que l'intégrale $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha} dt$ converge.

2)

Soit p et q des réels quelconques. On pose $I(p,q) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}} dt$.

a) Déterminer l'ensemble S des couples $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ tels que l'intégrale $I(p,q)$ converge.

b) Représenter l'ensemble solution S dans un repère cartésien du plan, avec p en abscisse et q en ordonnée. On hachurera la partie du plan correspondant à l'ensemble des points M de coordonnées $(p,q) \in S$.

3–a)

Justifier que $t \mapsto t^{2q+1}$ définit un changement de variable admissible dans l'intégrale $I(p,q)$ pour $q > -\frac{1}{2}$, et en déduire une relation entre $I(p,q)$ et $F(\alpha)$ pour des valeurs de p, q, α à préciser.

b) En utilisant le changement de variable $u \mapsto t = u^{\frac{1}{1-\alpha}}$, montrer que pour α appartenant à un intervalle à préciser, on a

$$F(\alpha) = G(\alpha) + \frac{1}{\alpha - 1} G\left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right)$$

c) On admet que, pour $\alpha \in D$, $G(\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\alpha + 1}$.

Pour $\alpha \in D$, exprimer $F(\alpha)$ comme la somme d'une série.

d) En déduire l'expression de $I(p,q)$ sous forme d'une série pour des valeurs de p et q à préciser.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

CORRIGE EXO D'ANALYSE NUMERO 11

1–a)

La fonction $g_\alpha : t \mapsto \frac{1}{1+t^\alpha}$ est continue sur $]0,1]$. L'intégrale $G(\alpha) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha}dt$ est impropre en 0.

$\alpha > 0$; $\lim\limits_{t\to 0^+} t^\alpha = 0$. La fonction g_α se prolonge par continuité au point 0. L'intégrale $G(\alpha)$ est faussement impropre donc convergente.

$\alpha = 0$; $g_\alpha(t) = \frac{1}{2}$; convergence sans problème.

$\alpha < 0$; $\lim\limits_{t\to 0^+} t^\alpha = +\infty$; donc $g_\alpha(t) \underset{(0)}{\sim} \frac{1}{t^\alpha}$. D'après le critère de Riemann, l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$, ce qui est le cas. Par équivalence des fonctions continues positives, l'intégrale $G(\alpha)$ est convergente.

L'intégrale $G(\alpha) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha}$ est convergente pour tout réel α : $D' = \mathbb{R}$

b) Sous réserve de convergence, $F(\alpha) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$.

L'intégrale $F(\alpha)$ est convergente si et seulement si l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$ est convergente.

La fonction $f_\alpha : t \in [1,+\infty[\mapsto \frac{1}{1+t^\alpha}$ est continue sur $[1,+\infty[$: l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$ est impropre uniquement en $+\infty$.

$\alpha > 0$; $f_\alpha(t) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{t^\alpha}$; l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$ d'après le critère de Riemann. Par équivalence des fonctions continues positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} f_\alpha(t)dt$ converge si $\alpha > 1$.

$\alpha = 0$; $f_\alpha(t) = \frac{1}{2}$: l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$ est divergente.

$\alpha < 0$; $f_\alpha(t) \underset{(+\infty)}{\sim} 1$ puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} t^\alpha = 0$. Donc divergence de l'intégrale.

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$

L'intégrale $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$: $D =]1,+\infty[$

2–a)

Notons $f_{p,q}(t) = \frac{t^{2q}}{1+t^{2p}}$.

La fonction $f_{p,q}$ est continue sur $]0,+\infty[$. L'intégrale $I(p,q)$ est impropre en 0 et $+\infty$.

- Convergence en 0.

$p > 0$. $f_{p,q}(t) \underset{(0)}{\sim} t^{2q} = \frac{1}{t^{-2q}}$; l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^{-2q}}dt$ converge si et seulement si $-2q < 1$ c'est-à-dire $q > -\frac{1}{2}$.

Par équivalence des fonctions continues positives, l'intégrale $\int_0^1 f_{p,q}(t)dt$ converge si $q > -\frac{1}{2}$.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.