



## ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

## ANALYSE ENONCE NUMERO 11

1-a) \_\_\_\_\_

Déterminer l'ensemble  $D'$  des réels  $\alpha$  tels que l'intégrale  $G(\alpha) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha}$  converge.

b) Déterminer l'ensemble  $D$  des réels  $\alpha$  tels que l'intégrale  $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$  converge.

2) \_\_\_\_\_

Soit  $p$  et  $q$  des réels quelconques. On pose  $I(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}} dt$ .

a) Déterminer l'ensemble  $S$  des couples  $(p, q) \in \mathbb{R}^2$  tels que l'intégrale  $I(p, q)$  converge.

b) Représenter l'ensemble solution  $S$  dans un repère cartésien du plan, avec  $p$  en abscisse et  $q$  en ordonnée. On hachurera la partie du plan correspondant à l'ensemble des points  $M$  de coordonnées  $(p, q) \in S$ .

3-a) \_\_\_\_\_

Justifier que  $t \mapsto t^{2q+1}$  définit un changement de variable admissible dans l'intégrale  $I(p, q)$  pour  $q > -\frac{1}{2}$ , et en déduire une relation entre  $I(p, q)$  et  $F(\alpha)$  pour des valeurs de  $p, q, \alpha$  à préciser.

b) En utilisant le changement de variable  $u \mapsto t = u^{\frac{1}{1-\alpha}}$ , montrer que pour  $\alpha$  appartenant à un intervalle à préciser, on a

$$F(\alpha) = G(\alpha) + \frac{1}{\alpha-1} G\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)$$

c) On admet que, pour  $\alpha \in D$ ,  $G(\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\alpha+1}$ .

Pour  $\alpha \in D$ , exprimer  $F(\alpha)$  comme la somme d'une série.

d) En déduire l'expression de  $I(p, q)$  sous forme d'une série pour des valeurs de  $p$  et  $q$  à préciser.

**CORRIGE EXO D'ANALYSE NUMERO 11**
**1-a)**

La fonction  $g_\alpha : t \mapsto \frac{1}{1+t^\alpha}$  est continue sur  $]0, 1[$ . L'intégrale  $G(\alpha) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha} dt$  est impropre en 0.

$\alpha > 0$  ;  $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^\alpha = 0$ . La fonction  $g_\alpha$  se prolonge par continuité au point 0. L'intégrale  $G(\alpha)$  est faussement impropre donc convergente.

$\alpha = 0$  ;  $g_\alpha(t) = \frac{1}{2}$  ; convergence sans problème.

$\alpha < 0$  ;  $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^\alpha = +\infty$  ; donc  $g_\alpha(t) \underset{(0)}{\sim} \frac{1}{t^\alpha}$ . D'après le critère de Riemann, l'intégrale  $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$  converge si et seulement si  $\alpha < 1$ , ce qui est le cas. Par équivalence des fonctions continues positives, l'intégrale  $G(\alpha)$  est convergente.

L'intégrale  $G(\alpha) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha}$  est convergente pour tout réel  $\alpha : D' = \mathbb{R}$

b) Sous réserve de convergence,  $F(\alpha) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$ .

L'intégrale  $F(\alpha)$  est convergente si et seulement si l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$  est convergente.

La fonction  $f_\alpha : t \in [1, +\infty[ \mapsto \frac{1}{1+t^\alpha}$  est continue sur  $[1, +\infty[$  : l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$  est impropre uniquement en  $+\infty$ .

$\alpha > 0$  ;  $f_\alpha(t) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{t^\alpha}$  ; l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$  est convergente si et seulement si  $\alpha > 1$  d'après le critère de Riemann. Par équivalence des fonctions continues positives, l'intégrale  $\int_1^{+\infty} f_\alpha(t) dt$  converge si  $\alpha > 1$ .

$\alpha = 0$  ;  $f_\alpha(t) = \frac{1}{2}$  : l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$  est divergente.

$\alpha < 0$  ;  $f_\alpha(t) \underset{(+\infty)}{\sim} 1$  puisque  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = 0$ . Donc divergence de l'intégrale.

L'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$  est convergente si et seulement si  $\alpha > 1$

L'intégrale  $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$  converge si et seulement si  $\alpha > 1 : D = ]1, +\infty[$

**2-a)**

Notons  $f_{p,q}(t) = \frac{t^{2q}}{1+t^{2p}}$ .

La fonction  $f_{p,q}$  est continue sur  $]0, +\infty[$ . L'intégrale  $I(p,q)$  est impropre en 0 et  $+\infty$ .

• Convergence en 0.

$p > 0$ .  $f_{p,q}(t) \underset{(0)}{\sim} t^{2q} = \frac{1}{t^{-2q}}$  ; l'intégrale  $\int_0^1 \frac{1}{t^{-2q}} dt$  converge si et seulement si  $-2q < 1$  c'est-à-dire  $q > -\frac{1}{2}$ .

Par équivalence des fonctions continues positives, l'intégrale  $\int_0^1 f_{p,q}(t) dt$  converge si  $q > -\frac{1}{2}$ .