ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ANALYSE ENONCE NUMERO 11

1–a)

Déterminer l'ensemble D' des réels α tels que l'intégrale $G(\alpha) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha}$ converge.

b) Déterminer l'ensemble D des réels α tels que l'intégrale $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha} dt$ converge.

2)

Soit p et q des réels quelconques. On pose $I(p,q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}} dt$.

a) Déterminer l'ensemble S des couples $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ tels que l'intégrale $I(p,q)$ converge.

b) Représenter l'ensemble solution S dans un repère cartésien du plan, avec p en abscisse et q en ordonnée. On hachurera la partie du plan correspondant à l'ensemble des points M de coordonnées $(p,q) \in S$.

3–a)

Justifier que $t \mapsto t^{2q+1}$ définit un changement de variable admissible dans l'intégrale $I(p,q)$ pour $q > -\frac{1}{2}$, et en déduire une relation entre $I(p,q)$ et $F(\alpha)$ pour des valeurs de p, q, α à préciser.

b) En utilisant le changement de variable $u \mapsto t = u^{\frac{1}{1-\alpha}}$, montrer que pour α appartenant à un intervalle à préciser, on a

$$F(\alpha) = G(\alpha) + \frac{1}{\alpha-1} G\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)$$

c) On admet que, pour $\alpha \in D$, $G(\alpha) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\alpha+1}$.

Pour $\alpha \in D$, exprimer $F(\alpha)$ comme la somme d'une série.

d) En déduire l'expression de $I(p,q)$ sous forme d'une série pour des valeurs de p et q à préciser.

CORRIGE EXO D'ANALYSE NUMERO 11

1–a)

La fonction $g_\alpha \ : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^\alpha}$ est continue sur $]0,1]$. L'intégrale $G(\alpha) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha}dt$ est impropre en 0.

$\alpha > 0$; $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} t^\alpha = 0$. La fonction g_α se prolonge par continuité au point 0. L'intégrale $G(\alpha)$ est faussement impropre donc convergente.

$\alpha = 0$; $g_\alpha(t) = \dfrac{1}{2}$; convergence sans problème.

$\alpha < 0$; $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} t^\alpha = +\infty$; donc $g_\alpha(t) \underset{(0)}{\sim} \dfrac{1}{t^\alpha}$. D'après le critère de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$, ce qui est le cas. Par équivalence des fonctions continues positives, l'intégrale $G(\alpha)$ est convergente.

$$\boxed{\text{L'intégrale } G(\alpha) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha} \text{ est convergente pour tout réel } \alpha : D' = \mathbb{R}}$$

b) Sous réserve de convergence, $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$.

L'intégrale $F(\alpha)$ est convergente si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$ est convergente.

La fonction $f_\alpha \ : t \in [1,+\infty[\mapsto \dfrac{1}{1+t^\alpha}$ est continue sur $[1,+\infty[$: l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$ est impropre uniquement en $+\infty$.

$\alpha > 0$; $f_\alpha(t) \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{1}{t^\alpha}$; l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$ d'après le critère de Riemann. Par équivalence des fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_\alpha(t)dt$ converge si $\alpha > 1$.

$\alpha = 0$; $f_\alpha(t) = \dfrac{1}{2}$: l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$ est divergente.

$\alpha < 0$; $f_\alpha(t) \underset{(+\infty)}{\sim} 1$ puisque $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^\alpha = 0$. Donc divergence de l'intégrale.

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$

$$\boxed{\text{L'intégrale } F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1 : D =]1,+\infty[}$$

2–a)

Notons $f_{p,q}(t) = \dfrac{t^{2q}}{1+t^{2p}}$.

La fonction $f_{p,q}$ est continue sur $]0,+\infty[$. L'intégrale $I(p,q)$ est impropre en 0 et $+\infty$.

- Convergence en 0.

$p > 0$. $f_{p,q}(t) \underset{(0)}{\sim} t^{2q} = \dfrac{1}{t^{-2q}}$; l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{-2q}}dt$ converge si et seulement si $-2q < 1$ c'est-à-dire $q > -\dfrac{1}{2}$.

Par équivalence des fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f_{p,q}(t)dt$ converge si $q > -\dfrac{1}{2}$.