ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ANALYSE ENONCE NUMERO 12

1–a)

Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t-x}}$ converge et calculer alors sa valeur notée $I(x)$.

b) Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}dt$ converge pour tout $x \in [0,1[$ et déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}dt$.

On note alors $T(f)$ la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$T(f)(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}dt, \text{ si } 0 \leq x < 1 \text{ et } T(f) \text{ continue en } 1$$

2–a)

Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a

$$T(f)(x) = \sqrt{1-x}\int_0^1 \frac{f(x+(1-x)u)}{\sqrt{u}}du.$$

b) On suppose f de classe C^1 sur $[0,1]$; montrer que la fonction $T(f)$ est continue sur $[0,1]$.

3)

On suppose dans cette question que $f(1) \neq 0$.

a) Donner un équivalent de $T(f)$ au voisinage de 1.

b) Montrer que $T(f)$ n'est pas dérivable en $x = 1$.

4–a)

Déterminer une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction f continue sur $[0,1]$, on a :

$$\sup_{x\in[0,1]} |T(f)(x)| \leq C \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

b) Déterminer la plus petite constante C vérifiant l'inégalité précédente.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.