ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ECE

ENONCE NUMERO 8

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$.

1)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose U_n la variable aléatoire $\min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

a) Calculer la fonction de répartition de U_n.

b) Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, la probabilité $P([U_n \geq \varepsilon])$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

2)

Compléter la deuxième ligne du code Scilab suivant pour que la fonction "minu" simule la variable U_k pour la valeur k du paramètre.

```
function u=min(k)
x=....
u=min(x)
endfunction
```

3)

Soit $p \in]0, 1[$ et Z la variable aléatoire telle que, pour tout réel x :

$$P([Z \leq x]) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} P([U_k \leq x])$$

(on admet qu'il existe une telle variable et qu'elle possède une densité)

a) Justifier, pour tout $x \in [0, 1]$, l'égalité :

$$P([Z \leq x]) = 1 - \frac{p(1-x)}{p + (1-p)x}$$

b) En déduire une densité de Z.

4–a)

Justifier que la fonction Scilab suivante fournit une simulation de la variable Z de la question précédente.

```
function z=geomin(p)
z=minu(grand(1,1,'geom',p))
endfunction
```

b) De quel nombre réel les instructions suivantes fournissent-elles une valeur approchée et pourquoi ?