ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ECE

ENONCE NUMERO 9

1–a)

Prouver que, pour tout entier $k \geq 2$, on a : $\sum_{j=2}^{k} \frac{1}{j} \geq \ln(\frac{k+1}{2})$.

b) Justifier que, pour tout réel $u < 1$, on a $\ln(1-u) \leq -u$.

c) On définit une suite (a_n) par :

$$a_0 = 1,\ a_1 = \frac{1}{2} \text{ et } \forall k \geq 2,\ a_k = (-1)^{k-1}\frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2k-3)}{2^k k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{2}\prod_{j=2}^{k}\frac{2j-3}{2j}$$

Montrer que pour tout $k \geq 1$, $|a_k| \leq \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{3}{2}}$.

2–a)

Soit $g :]-1,+\infty[\mapsto \mathbb{R}$ la fonction définie par : $g(t) = \sqrt{1+t}$.

Montrer que : $\forall t > -1,\ \forall k \in \mathbb{N},\ g^{(k)}(t) = k! a_k (1+t)^{\frac{1}{2}-k}$ où $g^{(k)}$ est la dérivée k ème de g.

On admet l'inégalité suivante :

$$\forall t \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left|g(t) - \sum_{k=0}^{n} g^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!}\right| \leq \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\sup_{0 \leq u \leq t}|g^{(n+1)}(u)|.$$

Montrer que $\forall t \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left|g(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k t^k\right| \leq t^{n+1}\left(\frac{2}{n+2}\right)^{\frac{3}{2}}$.

b) Soit f la fonction définie pour x réel par : $f(x) = \int_0^1 t^{-x}\sqrt{1+t}dt$.

Déterminer l'ensemble de définition D de f.

c) Montrer que, pour tout $x \in D$, $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1-x}$

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.