ALGEBRE LINEAIRE

Exercices d'oraux

Les exercices qui suivent sont extraits de sujets d'oraux rapportés par les candidats des concours Centrale-Supélec et Mines-Ponts des filières MP, PC et PSI. Ils ont été scrupuleusement vérifiés ou même légèrement modifié pour être totalement corrects.

Le sujet traité est l'algèbre linéaire, à savoir tout ce qui peut avoir un lien avec les espaces vectoriels, les endomorphismes et les matrices **sans traiter la réduction des endomorphismes et le cas particulier des espaces euclidiens**.

Le fait d'écarter pour ce recueil les sujets dernièrement cités émane d'un volonté de donner des exercices qui peuvent être traités tôt dans l'année (à la suite des révisions d'algèbre linéaire) et même pour certains en fin de première année.

Quelques exercices échappent à cette règle et ils sont explicitement signalés.

Bon courage à tous pour vos révisions !

Exercice 1

D'après Mines-Ponts PSI : Déterminer pour quels $a, b \in \mathbb{C}$ la matrice suivante est inversible :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & & & b \\ b & \ddots & \ddots & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & (0) & \ddots & \ddots & b \\ b & & & b & a \end{pmatrix}$$

Exercice 2

D'après Centrale PC : Sur $E = \mathbb{K}[X]$, on définit l'endomorphisme $\Delta : P \mapsto P(X+1) - P(X)$.

1. Déterminer $\mathrm{Ker}(\Delta)$ et $\mathrm{Im}(\Delta)$.
2. Pour tout entier n, démontrer l'existence d'une base $(B_0, ..., B_n)$ de $\mathbb{K}_n[X]$ vérifiant $B_0 = 1$ et $\Delta(B_k) = B_{k-1}$.

Exercice 3

D'après Centrale PC : Soit E et F deux espaces de dimensions respectives n et p, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que $u \circ v = \mathrm{Id}_F$. Montrer que $v \circ u$ est un projecteur dont on déterminera le noyau et l'image.

Exercice 4

D'après Centrale PSI : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $f(X) = AX$. Déterminer le rang, la trace et le polynôme caractéristique de f.

Exercice 5

D'après Centrale PC : Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que s'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tels que $\alpha u+\beta v \in \mathrm{GL}(E)$, alors $\mathrm{Ker}(u)\cap\mathrm{Ker}(v) = \left\{\vec{0}\right\}$.
2. La réciproque est-elle vraie en général ?
3. **Utilise une réduction** : Montrer que la réciproque est vraie si u et v commutent.

Exercice 6

D'après Mines-Ponts PSI

1. Soit N une matrice nilpotente, c'est à dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = 0$. Montrer que $I_n - N$ est inversible.
2. Soit M une matrice telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ pour lequel $pM^{p+1} = (p+1)M^p$. Montrer que $I_n - M$ est inversible.

Exercice 7

D'après Mines-Ponts PC : Soit f un endomorphisme d'un espace de dimension finie E tel que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2)$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$. Etudier la réciproque.

Exercice 8

D'après Mines-Ponts MP : Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients entiers de telles que :

$$\forall k \in [\![0, 2n]\!], \quad \det(A + kB) \in \{1, -1\}$$

1. Calculer $\det(A)$ et $\det(B)$ (*on pourra considérer* $Q(X) = (det(A + XB))^2$).
2. Montrer que A^{-1} est à coefficients entiers.

Exercice 9

D'après Mines-Ponts MP

1. Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on ait $f(AB) = f(BA)$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda\mathrm{Tr}$.
2. Soit g un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $g(I_n) = I_n$ et pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on ait $g(AB) = g(BA)$. Montrer que pour toute matrice A on a $\mathrm{Tr}(g(A)) = \mathrm{Tr}(A)$.

Exercice 10

D'après Mines-Ponts MP : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe des éléments $a_0, ...a_{n-1}$ de $\mathbb{K}$ tels que pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ on ait :

$$P(X + n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(X + k) = 0$$

On pourra interpréter la situation en terme d'endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

Corrigé de l'exercice 1

On supposera pour la suite que A est de taille $n \geqslant 3$. Ce sont les cas non évidents de calcul du déterminant.

En effectuant $L_1 \leftarrow \sum_{k=1}^{n} L_k$ on fait apparaître une ligne ayant le même coefficient $a+2b$ que l'on factorise pour ensuite éliminer les b en effectuant $L_k \leftarrow L_k - bL_1$ pour $k \geqslant 2$:

$$\det(A) = (a+2b)\ \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ b & \ddots & \ddots & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & (0) & \ddots & \ddots & b \\ b & & & b & a \end{pmatrix}$$

Ensuite, on peut effectuer les opérations successives $C_k \leftarrow C_k - C_{k-1}$ pour k **allant de** n **à** 2 pour avoir :

$$\det(A) = (a+2b)\ \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b & a-b & b-a & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & (0) & \ddots & \ddots & b-a \\ b & & & b & a-b \end{pmatrix}$$

On peut alors développer par rapport à la première ligne du déterminant puis effectuer $C_k \leftarrow C_k + C_{k-1}$ pour k **allant de** n **à** 2 pour obtenir un déterminant triangulaire inférieur valant :

$$\det(A) = (a+2b)(a-b)a^{n-2}$$

Ainsi, A est inversible si et seulement si $a \neq -2b$, $a \neq b$ et $a \neq 0$.

Corrigé de l'exercice 2

1. Soit $P \in \mathrm{Ker}(\Delta)$. Alors on a $P(X+1) = P(X)$ et la fonction polynomiale associée est 1-périodique. Elle est donc bornée sur $\mathbb{R}$ car elle l'est sur $[0,1]$ par continuité. De ce fait, elle est nécessairement de degré 0 pour des raisons de croissance à l'infini. Réciproquement, tout polynôme constant est dans $\mathrm{Ker}(\Delta)$. On a $\mathrm{Ker}(\Delta) = \mathbb{R}_0[X]$.

   Pour l'image, étudions l'image de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$. On a $\Delta(1) = 0$, $\Delta(X) = 1$ donc $1 \in \mathrm{Im}(\Delta)$. Puis $\Delta(X^2) = 2X + 1$ donc $X \in \mathrm{Im}(\Delta)$. Plus généralement, montrons que $\mathrm{Im}(\Delta)$ contient tous les X^k par récurrence.
   C'est vrai pour $k = 0, 1$. Supposons alors que $1, X, ..., X^k \in \mathrm{Im}(\Delta)$ on a alors :

$$\Delta(X^{k+2}) = \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+2}{j} X^j$$